Zusammenfassung

- Königsberger Brückenproblem
  - Eulertour
    - besucht alle Kanten
    - Anfangs- und Endknoten sind gleich
  - G eulersch $\Leftrightarrow$ deg(v)=0 mod 2 für alle v $\in$ V
- Planare Graphen
  - Flächenanzahl invariant: f = m-n+2
  - Dünn besetzte Graphen: m < 3(n-2)
  - Jeder nicht planare enthält Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$
  - Enthalten Knoten v mit deg(v) $\leq$ 5.

Färben von Graphen

Def: G ist k-färbbar $\Leftrightarrow \exists$ c:V $\rightarrow$ [k] mit
c(u) $\neq$ c(v) für alle {u,v} $\in$ E.
Chromatische Zahl:
χ(G) = min{k $\in \mathbb{N}$| G ist k-färbbar}.

Bsp:
- Jeder Graph ist n-färbbar.
- $\chi(K_n)=n$
- C_{2n} ist 2-färbbar.
- C_{2n+1} ist 3-färbbar.
- K_{n_1,n_2} ist 2-färbbar.
- Bäume sind 2-färbbar.

Anwendungen:
- Verteilen von Frequenzen
  - benachbarte Sender erhalten verschiedene Frequenzen
- Färben von Landkarten
  - benachbarte Länder erhalten verschiedene Farben

Bipartite Graphen

Satz: G bipartit $\Leftrightarrow$ G ist 2-färbbar.
$\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis ungerader Länge.

Erste Äquivalenz nach Definition. Zweite Äquivalenz:

„$\Rightarrow$“:

- Ann.: G enthält $C=(v_1,\dots,v_{2n+1})$.
  - Sei c eine 2-Färbung von G.
  - $c(v_1)=c(v_3)=\dots=c(v_{2n+1})$, aber $\{v_{2n+1},v_1\} \in E$ (Widerspruch)

„$\Leftarrow$“:

- Starte Full-BFS in beliebigem Knoten s.
  - Markiere Knoten mit Farbe (d[s] mod 2)+1.
  - Da G nur Kreise gerader Länge besitzt:
    Benachbarte Knoten erhalten unterschiedliche Farbe.

5-Färbbarkeit

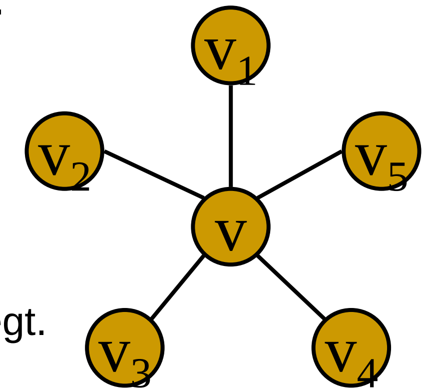
Satz (Heawood 1890): Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Induktion über n.
IV: $n \leq 5$ korrekt.
IS: Betrachten ebenes Diagramm eines planaren Graphen G mit n+1 Knoten.

- G enthält v mit $\deg(v) \leq 5$. $G' = (V \setminus \{v\})$ ist nach IV 5-färbbar.
- Seien v_i Nachbarn von v.

Fall 1: $\{c(v_1), \ldots, c(v_5)\} \neq [5]$: Färbe v mit Restfarbe.
Fall 2: Sei $c(v_i) = i$ für $i = 1, \ldots, 5$

- Sei $V_i = \{v \in V \mid c(v) = i\}$.
- Fall 2.1: v_1 und v_3 in verschiedenen ZHK von $G[V_1 \cup V_3]$.
  - Tausche Farben 1 und 3 in der ZHK von $G[V_1 \cup V_3]$, in der v_1 liegt.
  - Kein Nachbar von v hat Farbe 1. Setze $c(v)=1$.
- Fall 2.2: Pfad von v_1 nach v_3 ausschließlich mit Farben 1 und 3.
  - Kein Pfad von v_2 nach v_4 mit Farben ausschließlich 2 und 4 (muss wegen Planarität Farbe 1 oder 3 enthalten)
  - Analog zu Fall 2.1: Vertausche Farben 2 und 4 in ZHK, in der v_2 liegt. Färbe v mit Farbe 2.



Vierfarbensatz

Satz (Appel, Haken 1977): Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

Beweis der Korrektheit durch massiven Computereinsatz

- Beweis liefert $\mathcal{O}(n^2)$-Algorithmus für planare Graphen.
- Für allgemeine Graphen:
  - Gegeben $G=(V,E)$ und k.
  - Schwer zu entscheiden, ob $\chi(G) \leq k$.

Nicht-optimale Lösung

Algorithmus Greedy-Färbung

Eingabe: $G=(V,E)$ mit $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$

1. $c[v_1] \leftarrow 1$
2. for $i \leftarrow 2$ to n
    1. $c[v_i] = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq c[u]$ für alle bereits gefärbten Nachbarn u von $v_i\}$

Ausgabe: $c:V \Rightarrow [C(G)]$

Korrektheit:

- Nachbarknoten erhalten nie die gleiche Farbe.

Sei $\Delta(G) = \max_i\{\deg(v_i)\}$

- Es gilt $\chi(G) \leq C(G) \leq \Delta(G)+1$.
- Für $G=K_n$ oder $G=C_{2n+1}$ ist $\chi(G)=\Delta(G)+1$.
    - Für alle anderen G gibt es einen effizienten Alg. mit $C(G)\leq \Delta(G)$.

Kantenfärbung

Def: Eine k-Kantenfärbung ist eine Abb. c: E $\rightarrow$ [k] mit

c(e) $\neq$ c(e‘) für e,e‘ $\in$ E mit e $\cap$ e‘ $\neq \emptyset$

Chromatischer Index:

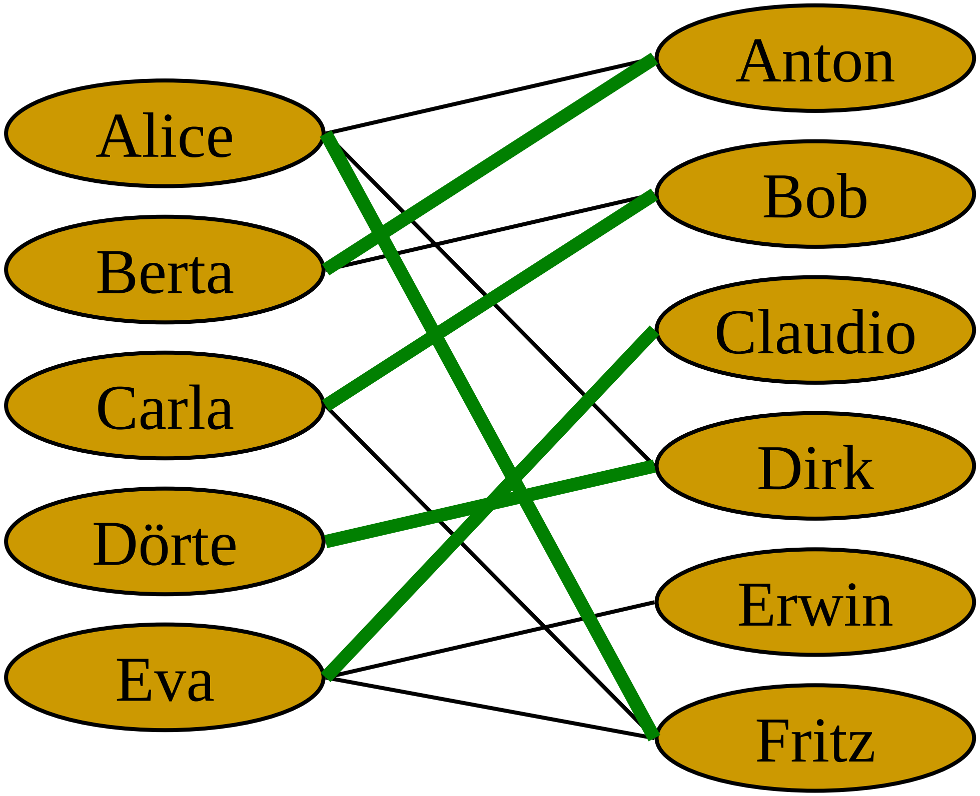
χ‘(G) = min{k $\in \mathbb{N}$| G hat k-Kantenfärbung}.

- Beobachtung:
  - Leicht zu sehen: χ‘(G) $\geq \Delta$(G)
  - Satz von Vinzing: χ‘(G) $\leq \Delta$(G)+1
- Entscheidungsproblem „Ist χ‘(G)=Δ(G)?“ ist schwer.
- Es gibt Alg. der in Zeit $\mathcal{O}$(nm) k-Färbung berechnet mit

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq k \leq \Delta(G)+1$$

Heiratsproblem

Gegeben: Graph von Bekanntschaften



Ziel: Verheirate alle Frauen.

Matching

Def: $M \subseteq E$ ist Matching der Größe $|M|$
$\Leftrightarrow \forall$ e,e‘ $\in$ M, e $\neq$ e‘: e $\cap$ e‘ = $\emptyset$

- M überdeckt v $\Leftrightarrow \exists$ u: {u,v} $\in$ M
- M perfektes Matching $\Leftrightarrow$ M überdeckt alle v $\in$ V
  $\Leftrightarrow$ $|M| = n/2$.

Heiratssatz

Satz(Hall): Sei $G=(A \uplus B, E)$ bipartit.

G enthält Matching M der Größe $|M|=|A|$

$\Leftrightarrow |\cup_{x \in X} \Gamma(x)| =: |\Gamma(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A$.

„$\Rightarrow$“: Sei M Matching, $|M|=|A|$.

- Betrachte $G'=(A \uplus B, M)$.
- Jedes $X \subseteq A$ hat in G‘ genau $|X|$ Nachbarn

  $\Rightarrow$ Jedes $X \subseteq A$ hat in G mindestens $|X|$ Nachbarn.

$|\Gamma(X)| \geq |X| \Rightarrow \text{Matching}, |M| = |A|$

Ann.: $G=(A \uplus B, E)$ hat max. Matching M, $|M|<|A|$

$\Rightarrow \exists$ nicht überdecktes $a_1 \in A$ mit Nachbarn b_1.Existenz von b_1 wegen $|\Gamma(\{a_1\})| \geq 1$.

Algorithmus Augmentierender-Pfad

Eingabe: $G=(A \uplus B, E)$, M, a_1, b_1

1. $k \leftarrow 1$
2. while (b_k wird von M überdeckt)
   1. $a_{k+1} \leftarrow$ Nachbar von b_k im Matching M
   2. $b_{k+1} \leftarrow$ beliebiges $v \in \Gamma(\{a_1,\ldots,a_{k+1}\}) \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}$
   3. $k \leftarrow k+1$

Ausgabe: augmentierender Pfad $p_a = (a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k)$

- Korrektheit: b_{k+1} existiert wegen $|\Gamma(\{a_1,\ldots,a_{k+1}\}) \setminus \{b_1,\ldots,b_k\}| \geq (k+1)-k = 1$
- $\{a_i, b_i\} \notin M$ für $i=1,\ldots,k$: k Kanten nicht in M
- $\{b_i, a_{i+1}\} \in M$ für $i=1,\ldots,k-1$: k-1 Kanten in M
- a_1, b_k nicht überdeckt.
  - Nimm $\{a_i, b_i\}$ in Matching auf und $\{b_i, a_{i+1}\}$ aus Matching raus.
  - M wird um Eins größer (Widerspruch zur Maximalität von M)