Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Kryptologie und IT-Sicherheit
Prof. Dr. Alexander May
Stefan Hoffmann

Präsenzübungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik 2
Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2014

Blatt 2 / 29./30. April 2014

AUFGABE 1:

Betrachten Sie folgende *nicht*-deterministische Turingmaschine N mit Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_a, q_r\}$, Startzustand $s = q_0$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, \triangleright\}$ und der folgenden Übergangsfunktion δ:

δ	0	1	$\triangleright$	$\sqcup$
q_0	$\{(q_0, 0, R), (q_0, \sqcup, R)\}$	$\{(q_0, 1, R)\}$	$\{(q_0, \triangleright, R)\}$	$\{(q_1, \sqcup, L)\}$
q_1	$\{(q_1, 0, L)\}$	$\{(q_1, 1, L)\}$	$\{(q_r, \triangleright, R)\}$	$\{(q_2, \sqcup, L)\}$
q_2	$\{(q_r, 0, R)\}$	$\{(q_2, 1, L)\}$	$\{(q_r, \triangleright, R)\}$	$\{(q_3, \sqcup, L)\}$
q_3	$\{(q_r, 0, L)\}$	$\{(q_a, 1, R)\}$	$\{(q_r, \triangleright, R)\}$	$\{(q_r, \sqcup, L)\}$

Zeichnen Sie den Baum der möglichen Berechnungspfade der NTM bei Eingabe 1010. Akzeptiert N die Eingabe 1010? Was ist die maximale Anzahl Rechenschritte $T_N(1010)$ von N auf 1010?

AUFGABE 2:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $|U| = k$ heißt *Clique* der Größe k (oder auch k-*Clique*), wenn für alle $i, j \in U$ mit $i \neq j$ gilt $\{i, j\} \in E$, d.h. zwischen allen Knoten aus U gibt es Kanten. Sei

$$\textsc{Clique} := \{(G, k) \mid G \text{ besitzt eine } \textit{Clique} \text{ der Größe mindestens } k.\}$$

Zeigen Sie $\textsc{Clique} \in \mathcal{NP}$ durch Angabe eines polynomiellen Verifizierers.

AUFGABE 3:

Ein ungerichteter Graph $H = (W, F)$, $W = \{1, \ldots, n\}$ heißt *Teilgraph* eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, wenn es paarweise verschiedene Knoten $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ gibt, so dass für alle $1 \leq i < j \leq n$

$$\{i, j\} \in F \Rightarrow \{v_i, v_j\} \in E$$

gilt. Sei

$$\textsc{Teilgraph} := \{(H, G) \mid H \text{ ist } \textit{Teilgraph} \text{ von } G.\}$$

Zeigen Sie $\textsc{Teilgraph} \in \mathcal{NP}$ durch Angabe einer NTM.

AUFGABE 4:

Zeigen Sie $\textsc{Clique} \leq_p \textsc{Teilgraph}$. Geben Sie dazu eine Funktion f in Pseudocode an. Zeigen Sie dann (wie in jeder Reduktion):

(i) $(G, k) \in \textsc{Clique} \;\Rightarrow\; (H', G') = f((G, k)) \in \textsc{Teilgraph}$

(ii) $(G, k) \notin \textsc{Clique} \;\Rightarrow\; (H', G') = f((G, k)) \notin \textsc{Teilgraph}$
oder alternativ
$(H', G') = f((G, k)) \in \textsc{Teilgraph} \;\Rightarrow\; (G, k) \in \textsc{Clique}$

(iii) Die Funktion f ist in Zeit polynomiell in der Eingabelänge berechenbar.