Wiederholung

- Operationen auf Mengen
  - $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(A)$
- Relationen, Abbildungen/Funktionen
  - Reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv
  - Injektiv, surjektiv, bijektiv
- Beweistechniken:
  - Indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis
  - Induktionsbeweis
- Landau-Notation
  - $\mathcal{O}$, Ω, Θ, o, ω

Ziehen von Elementen

Kombinatorik: Anordnungsmöglichkeiten einer (endlichen) Menge von Objekten.

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	(1,1),(1,2),(1,3), (2,1),(2,2),(2,3), (3,1),(3,2),(3,3)	{1,1},{1,2},{1,3}, {2,2},{2,3},{3,3}
ohne Zurücklegen	(1,2),(1,3),(2,1), (2,3),(3,1),(3,2)	{1,2}, {1,3},{2,3}

Allgemein: Ziehen k Elemente aus n-elementiger Menge

mit Zurücklegen, geordnet

(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)

- Anzahl Möglichkeiten für 1. Element: n
- Anzahl Möglichkeiten für 2. Element: n

  $\vdots$

- Anzahl Möglichkeiten für k. Element: n

Gesamt: n^k

Bsp:
Ein vierstelliges Zahlenschloss hat 10^4 Kombinationen.

ohne Zurücklegen, geordnet

(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)

- Anzahl Möglichkeiten für 1. Element: n
- Anzahl Möglichkeiten für 2. Element: n-1

$\vdots$

- Anzahl Möglichkeiten für k. Element: n-(k-1)

Gesamt: $n*(n-1)* \ldots * (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} n-i =: n^{\underline{k}}$

Bsp.: Anzahl der Zahlen <10^4 mit verschiedenen Ziffern:

10*9*8*7 = 5040

Geordnetes Ziehen aller Element

Spezialfall mit k=n:

D.h. $n^{\underline{k}} = n^{\underline{n}} = \prod^{n-1}_{i=0} n-i = n*(n-1)*\ldots*1$

- Bsp: Anzahl Wörter aus {a,b,c} der Länge 3 mit verschienenen Buchstaben = 3! = 6:
  - abc, acb, bac, bca, cab, cba

Definieren $n! := n^{\underline{n}}$

Weiterhin $n^{\underline{0}} := \prod^{-1}_{i=0} n-i = 1$, $0!=1$.

ohne Zurücklegen, ungeordnet

ungeordnet: {1,2}, {1,3}, {2,3}

geordnet: (1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)

- Geordnete Teilmengen: $n^{\underline{k}}$
- Fassen k-Tupel mit gleichen Elementen zusammen, z.B. (1,2) und (2,1).
  - Wieviele k-Tupel mit gleichen Elementen gibt es?
  - Anordnung von k-Teilmengen: k!
- Insgesamt:

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n*(n-1)*\ldots*(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

ohne Zurücklegen, ungeordnet

Bsp:

- Anzahl der Strings s $\in \{0,1\}^5$ mit 3 Nullen=
$$\binom{5}{3} = 10$$

  00011, 00101, 00110, 01001, 01010,
  01100, 10001, 10010, 10100, 11000
- Anzahl des Auftauchens von a^2b^2 in $(a+b)^4$ =
$$\binom{4}{2} = 6$$

mit Zurücklegen, ungeordnet

{1,1},{1,2},{1,3},{2,2},{2,3},{3,3}

Multimengen:

- Einzelne Elemente dürfen mehrmals vorkommen.
- M={1,1,2,3,3,3} ist Multimenge über G={1,2,3,4,5}.
  - Vielfachheit von 1 in M ist 2.
  - Kardinalität ist Anzahl Elemente mit Vielfachheit: |M|=6

Kodierung einer Multimenge:

  - Definiere Ordnung auf Grundmenge G, z.B. 1,2,3,4,5.
  - Für jedes Element e der Multimenge:
    - Falls e mit Vielfachheit v(e) auftaucht, notiere v(e) Sterne $*$.
    - Trenne einzelne Elemente mit einem Trennstrich |.
  - Bsp: Kodierung von M über G:

    $$* * | * | * * * ||.$$

  - Kodierungen entsprechen eineindeutig den Multimengen, d.h. die Kodierungsabbildung ist ein Isomorphismus.

mit Zurücklegen, ungeordnet

Frage: Wieviele Kodierungen gibt es?

- Kodierung hat n+k-1 Zeichen:
  - k Sterne $*$: Wir ziehen k Elemente.
  - n-1 Trennstriche |: Müssen n verschiedene Elemente trennen.

- Es müssen k Sterne an beliebigen Stellen „gezogen“ werden :
  - Jede Kombination von k Sternen und n-1 Trennstrichen entspricht einer Multimenge.

Anzahl der k-elementigen Multimengen über n-elem. Grundmenge:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

mit Zurücklegen, ungeordnet (Bsp.)

Bsp. Eiskauf:

- 3 Kugeln, 25 Sorten
- Anzahl der verschiedenen Kombinationen:

$$\binom{27}{3} = 2925$$

Zusammenfassung: Ziehe k aus n.

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

Kombinatorische Beweisprinzipien

Satz (Binomische Formel):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Beweis:

- Summanden sind von der Form $a^k b^{n-k}$, k=0,…,n.
  - Aus jedem der n Faktoren (a+b) wird a oder b „gezogen“.
  - Multiplikation ist kommutativ, d.h. $b*a*b^2*a = a^3b^2$
- Summand $a^k b^{n-k}$ kommt $\binom{n}{k}$-mal vor.
  - „Ziehen“ k Positionen für a aus n Positionen (ohne Zurücklegen, ungeordnet)

Summenregel

Summenregel für **disjunkte** Vereinigung:

$S = \biguplus_{i \in I} S_i$ (disjunkte Ver.) $\Rightarrow |S| = \sum_{i \in I} |S_i|$

Bsp:

| {S ⊂ [10] | |S|=5 und |S∩{1,2}| = 1 }|.

- S enthält entweder
  - 1 und 4 weitere Elemente aus {3,…,10} oder
  - 2 und 4 weitere Elemente aus {3,…,10}.
- Insgesamt: $2\binom{8}{4}$

Produktregel

Produktregel für das kartesische Produkt:

$$S = \times_{i \in I} S_i \Rightarrow |S| = \prod_{i \in I} |S_i|$$

Bsp: Anzahl vierstelliger Zahlen, deren i-te Ziffer durch i+1 teilbar ist.

- 1. Ziffer: $S_1=\{0,2,4,6,8\}$
- 2. Ziffer: $S_2=\{0,3,6,9\}$
- 3. Ziffer: $S_3=\{0,4,8\}$
- 4. Ziffer: $S_4=\{0,5\}$
- 5. Ziffer: $S_5=\{0\}$

Insgesamt: |S| = 5! = 120

Produktregel

Bsp:

$x \leftarrow 0;$

for i=1 to 5 do

  for j=1 to 10 do

    $x \leftarrow x+1;$

- $S_1=\{1,2,3,4,5\}$, $S_2=\{1,2,\ldots,10\}$
- Schleife durchläuft alle (i,j) mit $i \in S_1$, $j \in S_2$
- Produktregel: $|S| = 5*10$ Schleifendurchläufe

Gleichheitsregel

Kardinalität von Mengen unter Bijektionen invariant:

$$f : S \to T \text{ bijektiv } \Rightarrow |S| = |T|$$

Bsp:

x $\leftarrow$ 0; k $\leftarrow$ 0;
for i=1 to 5 do
    for j=1 to 10 do
        x $\leftarrow$ x+1; k $\leftarrow$ k+1;

- f: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, (i,j) $\mapsto$ k ist bijektiv
- k enthält die Anzahl der Schleifendurchläufe.

Weiteres Beispiel:
Kodierung Multimengen beim ungeordneten Ziehen mit Zurücklegen

Doppeltes Abzählen

Sei R $\subseteq$ S $\times$ T. Dann gilt „Zeilensumme=Spaltensumme“:

$$\sum_{s\in S} |\{t \in T | (s,t) \in R\}| = \sum_{t\in T} |\{s \in S | (s,t) \in R\}|$$

Bsp:

x $\leftarrow$ 0;

for i=1 to 5 do

    for j=1 to i do

        x $\leftarrow$ x+1;

- Definiere R={ (i,j) $\in$ $[5]^2$ | j $\leq$ i}.
- Zeilensumme: $\sum_{i \in [5]}$ |{j $\in$ [5] | j $\leq$ i}|= 1+2+3+4+5.
- Spaltensumme: $\sum_{j \in [5]}$ |{i $\in$ [5] | i $\geq$ j}| = 5+4+3+2+1.

Schubfachprinzip (Pigeonhole principle)

Intuitiv: Verteilt man n Elemente auf m, m<n, Fächer, so gibt es stets ein Fach, das mehr als ein Element enthält.

Satz: Sei f: X $\rightarrow$ Y eine Abbildung mit |X| > |Y|. Dann gibt es ein y $\in$ Y mit

$$|f^{-1}(y)| \geq 2.$$

Bsp.:

- Unter 367 Leuten gibt es stets zwei Personen, die am gleichen Tag Geburtstag haben.

Schubfachprinzip

Satz: In jeder Menge P von Personen gibt es stets zwei Personen, die die gleiche Anzahl von anderen Personen in P kennen.

Wir setzen voraus, dass die Relation „kennen“ symmetrisch ist, d.h.

$$\forall\, p_i, p_j \text{ gilt: } p_i \text{ kennt } p_j \Leftrightarrow p_j \text{ kennt } p_i$$

- Sei $P=\{p_1,p_2, \ldots, p_n\}$.
- Betrachte $f:P \to \mathbb{Z}_n$ mit

  $f(p_i) = j \Leftrightarrow p_i$ kennt j Personen
- Problem: $|P| = |\mathbb{Z}_n| = n$, d.h. f könnte Bijektion sein.
- Angenommen: f bijektiv.
  - $\exists\, p_i, p_j$ mit $f(p_i) = 0$ und $f(p_j) = p-1$
  - Widerspruch: p_j kennt jeden, insbesondere p_i, aber p_i kennt keinen.
- f ist nicht surjektiv und wegen $|P| = |\mathbb{Z}_N|$ nicht injektiv (Schubfachprinzip).
- Es gibt i‘, j‘ mit $f(p_{i'}) = f(p_{j'})$.

Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Verteilt man n Elemente auf m Fächer, so gibt es ein Fach, dass mindestens $\lceil n/m \rceil$ Elemente enthält.

Satz: Sei f: X $\to$ Y. Dann gibt es ein y $\in$ Y mit

$$|f^{-1}(y)| \geq \lceil |X|/|Y| \rceil.$$

Annahme: $\forall\, y \in Y$: $|f^{-1}(y)| \leq \lceil |X|/|Y| \rceil - 1$

$\Rightarrow \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \leq |Y|\, (\lceil |X|/|Y| \rceil - 1) < |Y| * |X|/|Y| = |X|.$

Widerspruch durch „Doppeltes Abzählen".

Spaltensumme =

$\sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| < |X| = \sum_{x \in X} 1 = \sum_{x \in X} |\{f(x)\}| =$ Zeilensumme.

Anwendung: Mindestpunktzahl

Teams $t_1,\ldots, t_n$ spielen ein Turnier jeder gegen jeden.
Gewinner erhalten 2 Punkte, bei Remis erhalten beide einen Punkt.

Wieviele Punkte hat der Gruppensieger mindestens?

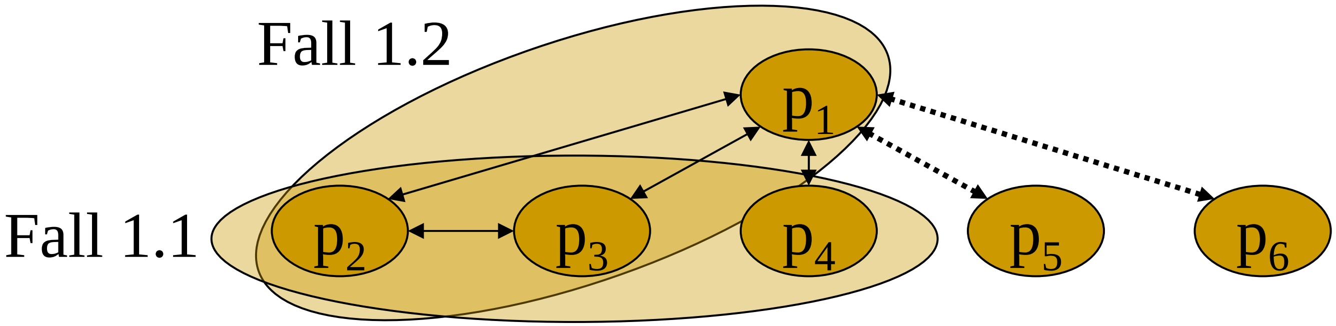
- Definiere f: $[2] \times [n]^2 \rightarrow [n]$ mit
  - $f(1,i,j) = f(2,i,j) = i \Leftrightarrow$ i schlägt j
  - $f(1,i,j) = f(2,i,j) = j \Leftrightarrow$ j schlägt i
  - $f(1,i,j) = i$ und $f(2,i,j)= j \Leftrightarrow$ Remis
- $|X|= 2 * n(n-1)/2$, $|Y| = n$.
- Schubfach: Sieger hat mindestens $|X|/|Y| = n-1$ Punkte.

Anwendung: Verallg. Schubfachprinzip

Satz (Ramsey): In jeder Gruppe P von 6 Personen gibt es

- **3 Personen, die sich alle kennen oder**
- **3 Personen, die sich alle nicht kennen.**

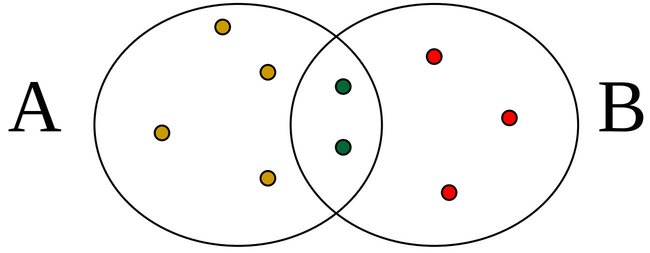
- Betrachte f: $\{p_2,\ldots,p_6\} \rightarrow \{0,1\}$ mit
  $f(p_i) = 1 \Leftrightarrow p_1$ kennt p_i.
- Verallg. Schubfach:
  p_1 kennt mind. $\lceil 5/2 \rceil=3$ Leute (Fall1) oder $\lceil 5/2 \rceil=3$ Leute nicht (Fall2).
- Betrachten nur Fall 1 (Fall2 analog) : OBdA p_1 kennt p_2, p_3, p_4.



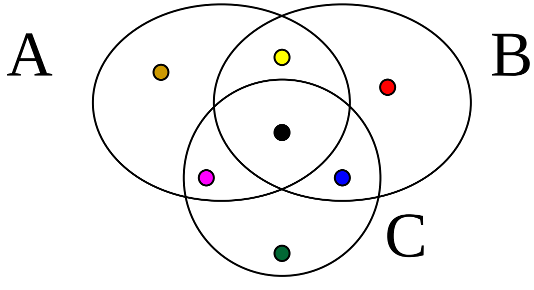
- Fall1.1: p_2, p_3, p_4 kennen sich nicht $\Rightarrow \exists$ 3 Personen, die sich nicht kennen.
- Fall1.2: $\exists\, p_i,p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}$, die sich kennen, oBdA p_2,p_3.
  $\Rightarrow p_1$, p_2, p_3 kennen sich.

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Zählen von Elementen in nicht-disjunkten Mengen.



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C| - (|A \cap B|+|A \cap C|+|B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Satz: Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} \left|\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}\right|$$

- Zeigen, dass jedes Element a einmal gezählt wird.
- Sei a in k Mengen A_i enthalten
  - $\Rightarrow$ a wird in jedem Summand $\binom{k}{r}$-mal gezählt.
  - $\Rightarrow$ a wird insgesamt einmal gezählt, denn:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} \binom{k}{r} &= -\sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r \\ &= 1 - \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r 1^{k-r} \\ &= 1 - (1-1)^k = 1 \end{aligned}$$

Anwendung: Inklusion-Exklusion

Bsp: $|\{x \in [100] \mid (2|x) \text{ oder } (3|x) \text{ oder } (5|x)\}|$

- Sei $A_k:=\{n \in [100] \mid k \text{ teilt } n\}$
- Es gilt $|A_k|:=\lfloor 100/k \rfloor$.
- Ferner gilt: $A_i \cap A_j = A_{kgV\{i,j\}}$
- Benötigen

  $$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2|+|A_3|+|A_5|- (|A_6|+|A_{10}|+|A_{15}|) +|A_{30}| = 74$$

Zusammenfassung

- Ziehen von Elementen
  - geordnet/ungeordnet
  - mit/ohne Zurücklegen
- Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Summenregel
  - Produktregel
  - Gleichheitsregel
  - Doppeltes Abzählen
  - Schubfachprinzip
  - Inklusion-Exklusion