Wiederholung: Ziehen von Elementen

- Ziehen von k Elementen aus n-elementiger Menge

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

Wiederholung: Beweisprinzipien

- Summenregel

$$S = \biguplus_{i\in I} S_i \text{ (disjunkte Ver.) } \Rightarrow |S| = \sum_{i\in I} |S_i|$$

- Produktregel

$$S = \times_{i\in I} S_i \Rightarrow |S| = \prod_{i\in I} |S_i|$$

- Gleichheitsregel

$$f : S \to T \text{ bijektiv} \Rightarrow |S| = |T|$$

Wiederholung: Beweisprinzipien

- Doppeltes Abzählen

$$\sum_{s\in S} |\{t \in T | (s,t) \in R\}| = \sum_{t\in T} |\{s \in S | (s,t) \in R\}|$$

- Schubfachprinzip

Sei f: X $\to$ Y. Dann gibt es ein y $\in$ Y mit $|f^{-1}(y)| \geq \lceil |X|/|Y| \rceil$.

- Inklusion-Exklusion

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq n} \left|\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}\right|$$

Permutationen

Def: Eine Fkt. f: A $\rightarrow$ A ist eine Permutation
$\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

- Schreibweise: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

- Semantik: $\pi(1)=2$, $\pi(2)=3$, $\pi(3)=1$, $\pi(4)=5$, $\pi(5)=4$.
- Bei fester Anordnung von $a_1, \ldots, a_n$ würde genügen
  $(\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_n))$
  - Vorsicht: Verwechslungsgefahr mit Zyklenschreibweise.

Fixpunkte einer Permutation

- Permutationen auf [n]:
  - Symmetrische Gruppe $\mathcal{G}_n$
- Größe der Symmetrischen Gruppe $|\mathcal{G}_n|=n!$
- Beispiel Permutation

$$\pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Def: i ist Fixpunkt von $\pi \Leftrightarrow \pi$(i)=i.

- 2 und 5 sind Fixpunkte von π'.

Fixpunktfreie Permutationen

Def: Permutation π_n: [n] $\rightarrow$ [n] fixpunktfrei

$\Leftrightarrow \pi_n(i) \neq i \quad \forall i \in [n]$

- Bestimme Anzahl D_n fixpunktfreier π_n (Derangementzahl).
- Anzahl aller Permutationen π_n: n!
- Sei ζ_n die Anzahl Permutationen mit mindestens einem Fixpunkt.

  $\Rightarrow D_n = n! - \zeta_n$
- Sei A_i die Menge der Bijektionen mit $\pi_n(i)=i$.

$$\zeta_n = \left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n} \left|\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}\right|$$

Derangementzahl D_n

- Größe der Schnittmenge:
  - Alle π: $[n]\rightarrow[n]$ mit $\pi(i_j) = i_j$ für $j=1,\ldots,r$
  - Alle anderen n-r Elemente dürfen beliebig abgebildet werden: (n-r)! Möglichkeiten.
    - Entspricht Permutationen der Menge $[n]\setminus\{i_1, \ldots, i_r\}$.

$$\begin{aligned}
\zeta_n &= \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1}\binom{n}{r}(n-r)! \\
&= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1}\frac{n!}{r!} \\
\Rightarrow D_n &= n! - \zeta_n = n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}$$

Zyklen von Permutationen

- Bsp.: π: [7] $\Rightarrow$ [7], $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
- π(1)=2, π(2)=3, π(3) = 5, π(5)=1, d.h.
  - Zykel $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 1$ der Länge 4.
  - **Def: $(i_1,\ldots,i_t)$ ist Zyklus der Länge t von π**
    $\Leftrightarrow \pi(i_j) = i_{j+1}$ für $1 \leq j < t$ und $\pi(i_t) = i_1$
  - Notation (1235)
  - Beachte: (1235) = (2351) = (3512) = (5123)
  - Hingegen gilt:(1235) $\neq$ (2135)
- Weitere Zyklen: (47) und (6).
- Insgesamt: π = (1235)(47)(6).

Stirlingzahl erster Art

Def.: Die Stirlingzahl erster Art $s_{n,k}$ bezeichne die Anzahl von Permutationen π_n mit genau k Zyklen.

- $s_{n,k} = 0$ für $n<k$
- $s_{n,0} = 0$
- $s_{0,0} := 1$

Satz: $\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$

- Jede Permutation hat zwischen 1 und n viele Zykel.
- Die Anzahl der Permutationen ist n!
- Satz folgt durch Anwendung der Summenregel.

Berechnung der ersten Stirlingzahl

Satz: Für alle k, n $\in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbf{s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) * s_{n-1,k}}$$

Konstruktieren aus π_{n-1} eine Permutation π_n

- Entweder π_{n-1} hat k-1 Zykel: Hinzufügen von Zykel (n):

  $s_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten für π_{n-1}
- Oder π_{n-1} hat k Zykel: Einfügen von n in einen Zykel:
  - n kann an n-1 Positionen eingefügt werden.
- Satz folgt aus Summenregel.

Beispielkonstruktion: Einfügen von 4

Betrachten $s_{4,2}$

- 1 Zykel über [3] + 1 Zykel (4)

  (123)(4), (132)(4)

- 2 Zykel über [3] + Einfügen von (4)

  (12)(3): (412)(3), (142)(3), (12)(43)

  (13)(2): (413)(2), (143)(2), (13)(42)

  (1)(23): (41)(23), (1)(423), (1)(243)

- Insgesamt: $s_{4,2}$ =11

Stirling-Dreieck erster Art

$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)*s_{n-1,k}$

n=0						1					
n=1					0		´1				
n=2				0		1		1			
n=3			0		2		3		1		
n=4		0		6		11		6		1	
n=5	0		24		50		35		10		1

Berechnung von Teilmengen

Satz: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Beweis:

- Korollar aus Binomischem Lehrsatz:
  $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$
- Oder kombinatorisch: Sei M Menge mit |M|=n
  - $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.
  - k-elementige Teilmengen von M: $\binom{n}{k}$
  - Potenzmenge: Summe über alle k-Teilmengen, k=0,…,n
  - Anwendung von Summenregel

Rekursive Berechnung von Binomialkoeffizienten

Satz: Für alle n,k $\in \mathbb{N}$ mit n>k gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Partitionieren k-elementige Teilmengen von [n]

- Teilmenge enthält n mit k-1 Elemente aus [n-1]:
  - $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten
- Teilmenge enthält n nicht.
  - $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten
- Anwendung von Summenregel

Pascal‘sches Dreieck

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

n=0						1					
n=1					1		´1				
n=2				1		2		1			
n=3			1		3		3		1		
n=4		1		4		6		4		1	
n=5	1		5		10		10		5		1

Vandermonde'sche Identität

Satz: Für alle k, m, n $\in \mathbb{N}_0$ **gilt:**

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{t=0}^{k} \binom{n}{t}\binom{m}{k-t}$$

Sei M={1,2,…,n+m}.

- Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M ist $\binom{n+m}{k}$.

Partitioniere M in M_1={1,…,n} und M_2={n+1,…,n+m}.

- k-elementige Teilmengen bestehen aus:
  - den $\binom{n}{t}$ t-elementigen Teilmengen von M_1 kombiniert mit
  - den $\binom{m}{k-t}$(k-t)-elementigen Teilmengen von M_2 für t=0,…,k.

k-Partition, Sterlingzahl zweiter Art

Def: Sei $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Eine k-Partition von A ist eine Zerlegung von A in paarweise disjunkte Teilmengen $A_1,\ldots,A_k$ mit $A=\bigcup^k_{i=1} A_i$.

Def: Wir bezeichnen mit $S_{n,k}$ die Anzahl von k-Partitionen einer n-elementigen Menge.

$S_{n,k}$ heisst auch die Sterlingzahl zweiter Art.

- $S_{n,k} = 0$ für $n<k$
- $S_{n,0} = 0$
- $S_{0,0} := 1$

Rekursive Berechnung von $S_{k,n}$

Satz: Für alle k, n $\in \mathbb{N}$ mit n $\geq$ k gilt:

$$\mathbf{S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k*S_{n-1,k}.}$$

Teilen k Partitionen in zwei Klassen auf:

- a_n befindet sich allein in einer Menge A_i.
  - $a_1,\dots,a_{n-1}$ befinden sich in (k-1)-Partition
    $S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten
- a_n befindet sich in nicht allein in einer Menge.
  - a_n ist in einer der k Menge, die eine k-Partition von $\{a_1,\dots,a_{n-1}\}$ bilden.
    $k*S_{n-1,k}$ Möglichkeiten
- Anwendung der Summenregel auf beide Klassen

Beispiel $S_{4,2}$

- Element 4 ist in Einzelmenge:
  - $\{1,2,3\} \cup \{4\}$
- Element 4 ist in einer der 2-Partitionen von $\{1,2,3\}$
  - $\{1,2\} \cup \{3\}$: $\{1,2,4\} \cup \{3\}$, $\{1,2\} \cup \{3,4\}$
  - $\{1,3\} \cup \{2\}$: $\{1,3,4\} \cup \{2\}$, $\{1,3\} \cup \{2,4\}$
  - $\{1\} \cup \{2,3\}$: $\{1,4\} \cup \{2,3\}$, $\{1\} \cup \{2,3,4\}$

Stirling Dreieck zweiter Art

$$\mathbf{S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k*S_{n-1,k}}$$

n=0						1					
n=1					0		´1				
n=2				0		1		1			
n=3			0		1		3		1		
n=4		0		1		7		6		1	
n=5	0		1		15		25		10		1

Bellzahlen

- Stirlingzahlen $S_{n,k}$ 2.Art:
  - Partition in k feste Klassen
- Bellzahlen B_n:
  - Partition in beliebige Anzahl Klassen
- $B_n := \sum^{n}_{k=0} S_{n,k}$
- B_n entsprechen Zeilensummen im Stirlingdreieck zweiter Art

Zahlpartitionen, geordnet

- Anzahl der geordneten k-Zahlpartionen von n$\in\mathbb{N}$:
  Anzahl Möglichkeiten, n als Summe k positiver natürlicher Zahlen zu schreiben
- z.B. 5 geordnete 3-Zahlpartitionen der Zahl 5:
  - 1+1+3, 1+3+1, 3+1+1, 1+2+2, 2+1+2, 2+2+1
- Idee:
  - Schreibe jede Zahl als Summe von Einsen:
    5 = 1+1+1+1+1
  - Wähle k-1 aus den n-1 Pluszeichen als Trennzeichen aus:
    5 = 1 **+** 1+1 **+** 1+1 = 1 + 2 + 2
- Anzahl der geordneten k-Partitionen: $\binom{n-1}{k-1}$

Zahlpartitionen, ungeordnet

- Ungeordnete k-Zahlpartition $P_{n,k}$ von n:
  - Kommt nur auf die Summanden an, nicht auf die Reihenfolge: 3+2 ist dieselbe Partition wie 2+3.

- $P_{n,k} = 0$ für $k>n$
- $P_{n,0} = 0$
- $P_{0,0} := 1$

Zahlpartitionen, ungeordnet

Satz: Für die Anzahl ungeordneter k-Zahlpartitionen $P_{n,k}$ einer Zahl n gilt für alle $k,n \in \mathbb{N}$ mit k>n:

$$\mathbf{P_{n+k,k} = \sum^{k}_{j=1} P_{n,j}}$$

Idee:

- Zerlege n+k in i 1-Summanden und k-i Summanden $n_i \geq 2$:
  - $n+k = 1+1+\ldots+1 + n_{i+1}+\ldots+n_k$ mit $n_j \geq 2$ für $j=i+1,\ldots,k$
- Subtrahiere 1 von jedem Summanden
  - $n = n'_{i+1}+\ldots+n'_k$ mit $n_j \geq 2$ für $j=i+1,\ldots,k$
  - D.h. n'_j sind (k-i)-Zahlpartition von n
  - Umgekehrt: (k-i)-Zahlpartition von n liefert k-Zahlpartition von n+k mit genau i Einsen (bijektive Abbildung)
  - Gleichheitsregel: $P_{n+k,k}$ mit i Einsen = $P_{n,k-i}$
  - Summenregel: $P_{n+k,k} = \sum_{i=0}^{k-1} P_{n,k-i} = \sum_{j=1}^{k} P_{n,j}$

Bsp: Zählen von Lösungen

Bestimme $|\{(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid x_1+x_2+\ldots+x_k = n\}|$

- Addiere zu jedem der k Summanden eine Eins:
  - $x'_1+x'_2+\ldots+x'_k = n+k$ mit $x'_i \geq 1$.
  - Entspricht Anzahl der geordneten k-Zahlpartionen von n+k:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Für allgemeine Polynome ist das Bestimmen der Anzahl der Lösungen ein schweres Problem.

Zusammenfassung

- Permutationen
  - Fixpunkte, Derangementzahl
  - Zyklen, Stirlingzahl $s_{n,k}$ erster Art
  - Stirlingdreieck 1. Art
- Teilmengen
  - Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten
  - Pascal‘sches Dreieck
  - k-Partition, Stirlingzahl $S_{n,k}$ zweiter Art
  - Stirlingdreieck 2. Art
  - Bellzahlen
- Zahlpartitionen
  - geordnet
  - ungeordnet $P_{n,k}$