Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Kryptologie und IT-Sicherheit
Prof. Dr. Alexander May
Gottfried Herold

Hausübungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik II

SS 2011

Blatt 3 / 26. April 2011 / Abgabe **bis spätestens Dienstag 10. Mai, 09:00 Uhr**

AUFGABE 1:

Ein ungerichteter Graph $H = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ heißt *Teilgraph* eines ungerichteten Graphen Graphen $G = (U, F)$, wenn es paarweise verschiedene Knoten $u_1, \dots, u_n \in U$ gibt, so dass gilt

$$\{v_i, v_j\} \in E \Rightarrow \{u_i, u_j\} \in F.$$

Sei

$$\textsc{Teilgraph} = \{(H, G) \mid H \text{ ist Teilgraph von } G.\}$$

Zeigen Sie, dass $\textsc{Clique} \leq_p \textsc{Teilgraph}$. [4P]

AUFGABE 2:

Sei $G' = (V', E')$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge $U' \subseteq V'$ heißt *unabhängig*, falls keine zwei Knoten $i, j \in U'$ durch eine Kante $\{i, j\} \in E'$ verbunden sind.

$$\textsc{Independent} = \{(G', k') \mid G' \text{ besitzt eine unabhängige Menge } U' \subseteq V' \text{ mit } |U'| \geq k'.\}.$$

Zeigen Sie, dass $\textsc{Clique} \leq_p \textsc{Independent}$. [3P]

Bitte wenden!

AUFGABE 3:

Seien K, L Sprachen mit $K \leq_p L$.

Zeigen Sie:
Falls $L \in \mathcal{NP}$, so ist auch $K \in \mathcal{NP}$.[3P]

AUFGABE 4:

Betrachten Sie die Sprache

$$\textsc{Half-Clique} = \{G \mid G = (V, E),\ |V| \text{ gerade und } G \text{ besitzt eine } \frac{|V|}{2} \text{ Clique.}\}$$

(a) Zeigen Sie, dass Half-Clique $\leq_p$ Clique, ohne zu benutzen, dass Clique $\mathcal{NP}$-vollständig ist.[2P]

(b) Zeigen Sie dass auch Half-Clique $\mathcal{NP}$-vollständig ist.[5P]

Hinweise zu b):
Benutzen Sie, dass Clique $\mathcal{NP}$-vollständig ist.
Was passiert, wenn sie zu einem Graphen einen neuen Knoten hinzufügen, der mit allen bisherigen / keinem Knoten verbunden ist?
Aufgabe 3 kann Arbeit sparen.

Erinnerung (Definition Clique):

Sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter, schleifenfreier) Graph. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $|U| = k$ heißt *Clique* der Größe k (oder auch $k-$Clique), wenn für alle $i, j \in U$ mit $i \neq j$ gilt $\{i, j\} \in E$, d.h. die zwischen allen Knoten aus V gibt es Kanten. Clique ist definiert als

$$\textsc{Clique} = \{(G, k) \mid G \text{ besitzt eine Clique der Größe mindestens } k.\}$$