Präsenzübungen zur Vorlesung

Zahlentheorie

SS 2013

Blatt 1 / 8.–10. April 2013

AUFGABE 1:

Betrachten Sie die Funktion $f(n) = n^2 + 2n^3$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen oder widerlegen Sie dies jeweils:

- $f(n) = \mathcal{O}(n^3)$
- $f(n) = \Omega(n^3)$
- $f(n) = \Theta(n^3)$
- $f(n) = \mathcal{O}(n^2)$
- $f(n) = \Omega(n^2)$
- $f(n) = \Theta(n^2)$

AUFGABE 2:

Seien $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Funktionen mit $f(x) \neq 0, g(n) \neq 0$ für alle n .

Formulieren Sie die Aussagen $f = \mathcal{O}(g), f = \Omega(g)$ jeweils in eine Aussage über $\limsup \frac{f}{g}, \liminf \frac{f}{g}$ um. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen oder widerlegen Sie dies jeweils:

- Wenn $\frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ für ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, so ist $f = \Theta(g)$.
- Wenn $f = \Theta(g)$ gilt, so ist $\frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ für ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$.
- $n^3 = \mathcal{O}(e^n)$.
- $3^n = \mathcal{O}(2^n)$

AUFGABE 3:

Sei $f_1 = \mathcal{O}(g_1), f_2 = \mathcal{O}(g_2)$ für Funktionen $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g_1 + g_2)$ ist.

AUFGABE 4:

Zeigen Sie: Für $n \geq 2$ ist keine der Zahlen der Form $n! + i$ mit $2 \leq i \leq n$ eine Primzahl. Insbesondere gibt es also beliebig grosse Bereiche ohne Primzahlen in den natürlichen Zahlen.

AUFGABE 5:

Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen p_i mit $p_i \equiv 3 \pmod{4}$.

Tipp: Versuchen Sie so vorzugehen wie Euklid.

AUFGABE 6:

Sei R ein beliebiger kommutativer Ring und $a, b, c \in R$. Zeigen Sie:

- Wenn $a \mid b$ gilt, gilt auch $a \mid bc$.
- Aus $a \mid b$ und $b \mid c$ folgt $a \mid c$

Erinnerung/Vorgriff: $a \mid b$ bedeutet „ a teilt b “, d.h. es gibt ein $m \in R$ so dass $b = am$ ist.