Kleiner Schreibfehler

Aufgabe 12.3:

- Ursprünglich fehlerhaft: $2p_i \leq B$
- Mitterweile korrigiert: $2w_i \leq B$

Wiederholung

Lösen von linearen Rekursionsgleichungen

- Homogen, 1. Ordnung
- Inhomogen, 1. Ordnung

Master-Theorem

- T(n) = a*T(n/b) + f(n)
- Vergleich: Asymptotisches Wachstum von f(n) und $n^{\log_b a}$.
- Dominierende Kosten im Rekursionsbaum:
  - Blätter, alle Ebenen oder Wurzel
- Beispiele: Mergesort, FFT, Binäre Suche, etc.
- Nicht immer anwendbar

Formale Potenzreihen

- Rekursionsgleichungen beschreiben Folgen
  - $(a_n)_{n \geq 0} = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Formale Potenzreihe: Multipliziere a_i mit x_i
  - $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\ldots$
- Erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$
  - $A(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

Notationen und Konventionen:

- Koeffizient a_n von x^n in $A(x)$: $[x^n]\ A(x)$
- $a_{-1}=a_{-2}=\ldots= 0$
- Suchen geschlossene Darstellung für
  - $A(x)$ als Funktion von x
  - a_n als Funktion von n

Vorteil: Rechnen mit geschlossenen Darstellungen ist einfach.

Addition/Multiplikation mit Konstanten

Seien $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ Folgen, c,d Konstanten und

$$c_n = c*a_n + d*b_n \text{ für alle } n \geq 0$$

Dann gilt:

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} (c*a_n + d*b_n)x^n$$
$$= c*\sum_{n \geq 0} a_n x^n + d*\sum_{n \geq 0} b_n x^n$$
$$= c*A(x) + d*B(x)$$

Multiplikation

Seien A(x), B(x) erzeugende Funktionen.

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n \end{aligned}$$

Entspricht Folge: $(c_n)_{n \geq 0}$ mit $c_n = \sum^n_{k=0} a_k b_{n-k}$ für alle $n \geq 0$.

- $(c_n)_{n \geq 0}$ nennt man Faltung oder Konvolution der Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$.

Interessante Spezialfälle:

- Shift $B(x) = x^m$: $c_n = a_{n-m}$, d.h. $c_m=a_0$, $c_{m+1}=a_1$, usw.
    - Liefert Shift der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ um m nach rechts
    - Auffüllen von links mit 0.
- Kumulative Summe $B(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$: $c_n = \sum_k^n a_k$
    - Liefert Summe der ersten n Folgenglieder von $(a_n)_{n \geq 0}$

Beispiel: Verschieben nach rechts

Def: Die erzeugende Funktion $G(x)=\sum_{n \geq 0} x^n$ der Einserfolge 1,1,1,… bezeichnet man als geometrische Reihe.

Bsp: Subtrahieren von der Einserfolge die um m nach rechts verschobene Einserfolge.

- Um m nach rechts verschoben: $x^m * G(x)$. Erhalten
  $$G(x) - x^m * G(x) = \sum_{n \geq 0} x^n - x^m \sum_{n \geq 0} x^n$$
  $$= \sum_{n \geq 0} x^n - \sum_{n \geq m} x^n = \sum_{n=0}^{m-1} x^n$$
- Entspricht der Folge aus m Einsen, sonst Nullen:
  1,1,…,1,0,0,…
- $\sum_{n=0}^{m-1} x^n$ ist die endliche geometrische Reihe mit m Elementen.

Verschieben, Alternieren, Koeffizienten

- $a_0, a_1, a_2, \ldots \mapsto a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ mittels

$$\frac{A(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{m-1} x^{m-1}}{x^m} = \sum_{n \geq m} a_n x^{n-m} = \sum_{n \geq 0} a_{n+m} x^n$$

- $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \mapsto a_0, -a_1, a_2, -a_3, \ldots$ mittels

$$A(-x) = \sum_{n \geq 0} a_n (-x)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n$$

- $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \mapsto a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots$ mittels

$$\frac{d}{dx} A(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Invertieren von Potenzreihen

Def: $A(x)$ ist invers zu $B(x)$, falls $A(x)*B(x) = 1$

- Beachte: Potenzreihe 1 repräsentiert die Folge $(c_n)_{n \geq 0} = 1,0,0,0,\ldots$

Satz: Inverses von $(a_n)_{n\geq 0}$ existiert $\Leftrightarrow$ $a_0 \neq 0$.

„$\Rightarrow$“: Sei $(b_n)_{n\geq 0}$ invers zu $(a_n)_{n \geq 0}$

- $c_0 = a_0*b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0$.

„$\Leftarrow$“: Existenz von b_n per Induktion über n:

- IA n=0:

  $c_0=1 \Rightarrow b_0 = 1/a_0$. (existiert wegen $a_0 \neq 0$)

- IS $n-1 \rightarrow n$:

  $0=c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

  $\Rightarrow b_n = -1/(a_0)*(\sum^{n}_{k=1} a_k b_{n-k})$ (existiert wegen $a_0 \neq 0$)

Geometrische Reihe

Geschlossene Form der geometrischen Reihe 1,1,1,…

- Inverses von $A(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$:
  - $b_0 = 1/a_0 = 1.$
  - $b_n = -\sum^n_{k=1} b_{n-k} ,= -\sum^{n-1}_{k=0} b_k$, d.h. $b_1=-1$, $b_2=b_3=\ldots=0$

  $\Rightarrow$ $(1-x)*A(x) = 1$

  $\Rightarrow$ $A(x) = 1/(1-x)$

  ist geschlossene Form der formalen Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} x^n$

Anwendungen:

- Endliche geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{m-1} x^n = A(x) - x^m A(x) = \frac{1}{1-x} - x^m \frac{1}{1-x} = \frac{1-x^m}{1-x}$$

- Geschlossene Form der Reihe 1,2,3,4,…:

$$B(x) = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{d}{dx} A(x) \Rightarrow B(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Verschiedene Herleitungen

Wollen geschlossene Form für 1,0,1,0,…

- Erzeugende Funktion $B(x)=\sum_{n\geq 0} x^{2n}$
  - Substitution $x \mapsto x^2$ in geometrischer Reihe
    $\Rightarrow B(x) = 1/(1-x^2)$
- 1,-1,1,-1,… hat erzeugende Funktion $A(-x)=1/(1+x)$
  - Kumulative Summe der Folge liefert 1,0,1,0,…
    $\Rightarrow B(x) = G(x)*A(-x) = 1/(1+x)*1/(1-x) = 1/(1-x^2)$
- 1,-1,1,-1,… hat erzeugende Funktion $A(-x)=1/(1+x)$
  - Addition von 1,-1,1,-1,… mit 1,1,1,1,… liefert 2,0,2,0,…
    $\Rightarrow ½*(1/(1+x)+1/(1-x)) = 1/(1-x^2)$

Polyas Geldwechsel

- Gegeben: Betrag n, Münzen 1,5,10 Cent
- Gesucht: #(Möglichkeiten), n mit den Münzen zu zahlen

- Folge $(a_n)_{n \geq 0}$:
  - a_n ist #(Möglichkeiten), Betrag n mit 1-Cent Münzen zu zahlen
  - $(a_n)_{n \geq 0} = 1,1,1,1,\dots$
  - $A(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = 1/(1-x)$
- Folge $(b_n)_{n \geq 0}$:
  - b_n ist #(Möglichkeiten), Betrag n mit 5-Cent Münzen zu zahlen
  - $(b_n)_{n \geq 0} = 1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,\dots$
  - $B(x) = \sum_{n \geq 0} x^{5n} = 1/(1-x^5)$
- Analog Folge $(c_n)_{n \geq 0}$: $C(x) = \sum_{n \geq 0} x^{10n} = 1/(1-x^{10})$

Divide & Conquer Lösung

Zahlen n mittels k 1-Cent und n-k 5-Cent:

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}$

- D.h. Faltung/Konvolution von $(a_n)_{n \geq 0}$ mit $(b_n)_{n \geq 0}$
- $[x^n]$ A(x)*B(x) ist Koeffizient von x^n im Produkt
  - $[x^n]$ A(x)*B(x) = #(Möglichkeiten), n mit 1- und 5-Cent zu zahlen.

- Zusätzlich 10-Cent Münzen
  - $A(x)*B(x)*C(x) = 1/(1-x) * 1/(1-x^5) * 1/(1-x^{10})$
  - $[x^n]$ A(x)*B(x)*C(x) = #(Möglichkeiten), n mit 1-,5- und 10-Cent zu zahlen.

Lösen von Rekursionen

Rekursion: $a_n = a_{n-1} + 1$ für $n \geq 1$ und $a_0 = 1$.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_{n-1}+1)x^n \\ &= 1 + x \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} x^n \\ &= x \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} x^n \\ &= x \cdot A(x) + \frac{1}{1-x} \qquad \Rightarrow A(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Wissen, dass $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ für $1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n$$

Koeffizientenvergleich: $a_n = n+1$ für alle $n \geq 0$.

Allgemeine Strategie

1. Aufstellen der erzeugenden Fkt. $A(x)=\sum_{n \geq 0} a_n x^n$
2. Einsetzen von Anfangswerten und Rekursionsgleichung.
3. Stelle alle a_n durch $A(x)$ dar.
4. Auflösen nach $A(x)$ liefert geschlossene Form $A(x)=f(x)$.
5. Formulierung von $f(x)$ als formale Potenzreihe
   - Hilfsmittel: Partialbruchzerlegung
6. Koeffizientenvergleich: Ablesen von geschlossener Form für a_n