Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

An einer Schule werden 4 verschiedene Sportkurse angeboten. 7 neue Schüler müssen sich entscheiden in welchen sie gehen wollen.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?
b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn an jedem Kurs mindestens einer der Neuen teilnehmen soll?
c) Alle Schüler wechseln nach einer Woche gruppenweise die Kurse. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

a) Beweise oder widerlege: $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$.
b) Beweise: $S_{n+1,k+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 93.$$

Bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen mit $x_i \geq 5$ für $1 \leq i \leq 7$.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Sei M eine endliche Menge. Beweise, dass die Potenzmenge von M mit der Inklusionsrelation $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ein distributiver Verband ist.

Präsenzaufgabe 2.5

a) Begründe inhaltlich:
   - $P_{n,n} = P_{n,n-1} = 1$,
   - $P_{n,n-2} = 2$,
   - $P_{n,2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ und
   - $P_{n,r} = P_{n-1,r-1} + P_{n-r,r}$.

b) Wieviel ungeordnete Zahlpartionen der 8 mit 4 Summanden gibt es?

Präsenzaufgabe 2.6

Betrachte folgende Permutation:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 2 & 3 & 5 & 8 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Wieviele Fixpunkte besitzt diese Permutation?
b) Gib die Zyklenzerlegung dieser Permutation an.
c) Ist (80916) ein Zyklus dieser Permutation?
d) Wieviele Permutationen von $[9]$ gibt es, die genau so viele Zyklen enthalten?

Präsenzaufgabe 2.7

Gegeben sei die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 39.$$

Bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen $x_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq 4$.

Präsenzaufgabe 2.8

a) Zeige, dass die Menge $M = \mathbb{N}$ mit der Relation $x \preceq y :\Longleftrightarrow x|y$ eine partielle Ordnung bildet.
b) Zeichne für die Teilbarkeits-Relation $x|y$ auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ das Hasse-Diagramm und gib die unmittelbaren Vorgänger von 6 und 12 an.
c) Bilden $(\mathbb{N}, |)$ einen (distributiven) Verband?