Induktionsbeweis

Satz Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beweis: Induktion über n

- (IV) Induktionsverankerung: n=2 prim.
- (IA) Induktionsannahme: Jede Zahl $\leq n$ lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.
- (IS) Induktionsschrift n$\rightarrow$ n+1: Fallunterscheidung
  - Fall 1: $n + 1$ prim, d. h. $n + 1$ ist Produkt von Primzahlen.
  - Fall 2: $n + 1$ zusammengesetzt, d. h. $n + 1 = a \cdot b$ mit $1 < a, b \leq n$. Wende Induktionsannahme auf a und b an.

Widerspruchsbeweis

Satz Anzahl Primzahlen

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Annahme: $\exists$ endlich viele Primzahlen $p_1 ..., p_n$ (n beliebig, aber fest).

- Setze $m = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$.
- Es gilt $m = 1 \mod p_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
- D.h. p_i teilt m nicht (wegen $p_i \geq 2$).
- Insbesondere ist $m \neq p_i$, $i = 1, \ldots, n$
- Daraus folgt, dass m prim.
- Damit existieren mindestens $n + 1$ Primzahlen.
  (Widerspruch: Nach Annahme existieren genau n Primzahlen.)

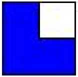
Induktionsbeweis

Satz Kacheln eines Schachbretts

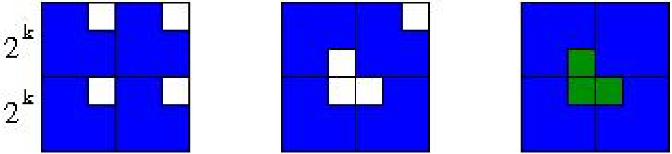
Jedes Schachbrett mit Seitenlänge 2^k lässt sich durch 3-Felder große, L-förmige Teile so kacheln, dass die rechte obere Ecke frei bleibt.

Beweis: Induktion über k

- IV (k=1)



- IA: Satz sei korrekt bis k.
- IS (k$\rightarrow$ k+1):



Landau-Notation $\mathcal{O}$

Definition Landau Notation $\mathcal{O}$

Seien $f(n), g(n)$ Funktionen. Wir schreiben $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ gdw

$$\exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|.$$

Alternativ: $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \frac{|f(n)|}{|g(n)|} < \infty$

Beispiele:

- $3n^2 + n + 2 = \mathcal{O}(n^2)$
- $3n^2 + n + 2 = \mathcal{O}(n^3 \log n)$
- $\sum_{i=1}^{n} i = \mathcal{O}(n^2)$
- $\sum_{i=1}^{d} a_i n^i = \mathcal{O}(n^d)$
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \mathcal{O}(\log n)$
- $\log_2 n = \mathcal{O}(\log_e n)$

Landau-Notation Ω

Definition Landau Notation Ω

Seien $f(n), g(n)$ Funktionen. Wir schreiben $f(n) = \Omega(g(n))$ gdw

$$\exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f(n)| \geq c \cdot |g(n)|.$$

Alternativ: $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \inf \frac{|f(n)|}{|g(n)|} > 0$

Beispiele:

- $3n^2 + n + 2 = \Omega(n^2)$
- $3n^2 + n + 2 = \Omega(n \log n)$
- $\sum_{i=1}^{n} i = \Omega(n^2)$
- $\sum_{i=1}^{d} a_i n^i = \Omega(n^d)$
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Omega(\log n)$
- $\log_2 n = \Omega(\log_e n)$

Landau-Notation Θ

Definition Landau Notation Θ

Seien $f(n), g(n)$ Funktionen. Wir schreiben $f(n) = \Theta(g(n))$ gdw

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ und } f(n) = \Omega(g(n)).$$

Bsp:

- $\sum_{i=1}^{d} a_i n^i = \Theta(n^d)$
- $\log_2 n = \Theta(\log_e n)$

Landau-Notation o, ω

Definition Landau Notation o

Seien $f(n), g(n)$ Funktionen. Wir schreiben $f(n) = o(g(n))$ gdw

$$\forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|.$$

Alternativ: $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0.$

Bsp:

- $n = o(n^2),\ 10n^2 / \log\log n = 0(n^2)$

Definition Landau Notation ω

Seien $f(n), g(n)$ Funktionen. Wir schreiben $f(n) = \omega(g(n))$ gdw

$$\forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f(n)| \geq c \cdot |g(n)|.$$

Alternativ: $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} \to \infty.$

Bsp:

- $n^2 = \omega(n),\ 10n^2 \log\log n = \omega(n^2)$

Ziehen von Elementen

Kombinatorik: Bestimmung der Anzahl Anordnungsmöglichkeiten einer (endlichen) Menge von Objekten.

Bsp: Ziehen 2 Elemente aus einer 3-elementigen Menge {1,2,3}.

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	(1,1), (1,2), (1,3), (2,1),(2,2),(2,3), (3,1),(3,2),(3,3)	{1,1},{1,2}, {1,3},{2,2}, {2,3}, {3,3}
ohne Zurücklegen	(1,2),(1,3), (2,1),(2,3), (3,1),(3,2)	{1,2}, {1,3}, {2,3}

Frage: Wieviele Möglichkeiten bestehen für das Ziehen von k Elementen aus einer n-elementigen Menge?

mit Zurücklegen, geordnet

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)$$

- Anzahl Möglichkeiten für 1. Element: n
- Anzahl Möglichkeiten für 2. Element: n

$$\vdots$$

- Anzahl Möglichkeiten für k. Element: n

Gesamt: n^k Möglichkeiten

Bsp: Für jede EC-Karte gibt es 10^4 mögliche PINs.

ohne Zurücklegen, geordnet

$$(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)$$

- Anzahl Möglichkeiten für 1. Element: n
- Anzahl Möglichkeiten für 2. Element: n-1

$$\vdots$$

- Anzahl Möglichkeiten für k. Element: n-(k-1)

Gesamt: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} n - i =: n^{\underline{k}}$
Sprechweise: k-te untere Faktorielle von n

Bsp: Anzahl vierstelliger Dezimalzahlen mit verschiedenen Ziffern:

$$10^{\underline{4}} = 5040.$$

Geordnetes Ziehen aller Elemente

Beim geordneten Ziehen aller Elemente betrachten wir den Spezialfall

$$n^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1} n - i = \prod_{i=1}^{n} i := n!$$

Wir definieren weiterhin

- $n^{\underline{0}} = \prod_{i=0}^{-1} n - i := 1$
- $0^0 = 0! := 1$

Bsp: Anzahl Worte der Länge 3 über $\{a, b, c\}$ mit verschiedenen Buchstaben ist $3! = 6$:

- abc,acb,bac,bca,cab,cba

ohne Zurücklegen, ungeordnet

ungeordnet:	{1,2},	{1,3},	{2,3}
geordnet:	(1,2),(2,1),	(1,3),(3,1),	(2,3),(3,2)

- Anzahl geordneter Teilmengen: $n^{\underline{k}}$
- Fassen k-Tupel mit gleichen Elementen zusammen.
- Wieviele k-Tupel mit gleichen Elementen gibt es?
  Anordnung von k-Teilmengen: $k!$

Gesamt: $\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$

Bsp:

- Anzahl der Strings $s \in \{0,1\}^5$ mit genau 3 Nullen: $\binom{5}{3}$.
- Anzahl des Auftauchens von a^2b^2 in $(a+b)^4$: $\binom{4}{2}$.

mit Zurücklegen, ungeordnet

$$\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,2\},\{2,3\},\{3,3\}$$

Multimenge:

- Einzelne Elemente dürfen mit Vielfachheiten vorkommen.
- $M = \{1,1,2,3,3,3\}$ ist Multimenge über $G = \{1,2,3,4,5\}$.
  - Vielfachheit von 1 in M ist 2.
  - Kardinalität von M: Anzahl Elemente mit Vielfachheit, d.h. $|M| = 6$.

Kodierung einer Multimenge:

- Definiere Ordnung auf Grundmenge G, z. B. 1,2,3,4,5.
- Für jedes Element e der Multimenge:
  - Falls e mit Vielfachheit v(e) auftaucht, notiere v(e) Sterne $*$.
  - Trenne einzelne Elemente mit einem Trennstrich $|$.
- Bsp: Kodierung von M über G:

$$**|*|***||.$$

- Kodierungen entsprechen eindeutig den Multimengen, d. h. die Kodierungsabbildung ist ein Isomorphismus.

mit Zurücklegen, ungeordnet

Frage: Wieviele verschiedene Kodierungen gibt es?

- Kodierung besitzt $n + k - 1$ Zeichen
  - k Sterne $*$: Wir ziehen k Elemente.
  - $n - 1$ Trennstriche $|$: Wir müssen n verschiedene Elemente trennen.
- Es müssen k Sterne an beliebigen Stellen der Kodierung platziert werden:
  - Jede Kombination von k Sternen und n-1 Trennstrichen entspricht einer Multimenge.
- Ziehen k-elementige Menge aus $(n + k - 1)$-elementiger Menge.

Gesamt:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Bsp: 25 Eissorten, wir kaufen 3 Kugeln: $\binom{27}{3}$ Möglichkeiten

Zusammenfassung: Ziehe k aus n Elementen

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$