Invertieren von Potenzreihen

- Sei $E(x)$ die Erzeugende Funktion der Reihe $1, 0, 0, 0, \ldots$.
- $E(x)$ ist neutrales Element der Multiplikation von Potenzreihen.

Definition Inverses einer Potenzreihe

Sei $A(x), B(x)$ formale Potenzreihen. $A(x)$ ist *invers* zu $B(x)$ falls $A(x)B(x) = E(x)$.

Satz Existenz von Inversen

Sei K ein Körper. Sei $A(x)$ die Erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n \in K$. Das Inverse von $A(x)$ existiert gdw $a_0 \neq 0$.

Beweis:

- „ $\Rightarrow$ “ : Sei $B(x)$ invers zu $A(x)$.
- Dann gilt $[x_0]A(x)B(x) = a_0 b_0 = 1$, d.h. $a_0 \neq 0$.

Geometrische Reihe

Beweis: Fortsetzung

- „ $\Leftarrow$ “ : Wir zeigen die Existenz von b_n per Induktion über n.
- **IA** für $n = 0$: $b_0 = \frac{1}{a_0}$ existiert wegen $a_0 \neq 0$.
- **IS** $n - 1 \to n$: Wir benötigen $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$.
- Damit gilt $b_n = -\frac{1}{a_0} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

Anwendung:

- Suchen geschlossene Form der geometrischen Reihe $1, 1, 1, \ldots$
- Dazu bestimmen wir das Inverse $B(x)$ von $G(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$.
- Es gilt $b_0 = \frac{1}{g_0} = 1$. Ferner ist $b_n = -\sum_{k=1}^{n} b_{n-k} = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k$.
- Dies liefert $b_1 = (-1)$ und $b_2 = b_3 = \ldots = 0$.
- Damit folgt $(1 - x)G(x) = 1$.
- Wir erhalten die bekannte geschlossene Form $G(x) = \frac{1}{1-x}$.
- **Warnung:** Wir vernachlässigen hier den sog. Konvergenzradius.

Weitere geschlossene Formen

Geschlossene Formen:

- Endliche geometrische Reihe
  $$\sum_{n=0}^{m-1} x^n = G(x) - x^m G(x) = \frac{1}{1-x} - x^m \frac{1}{1-x} = \frac{1-x^m}{1-x}.$$
- Reihe $1, 2, 3, 4, \ldots$
  $$B(x) = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{d}{dx} G(x), \text{ d.h. } B(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Verschiedene Herleitungen der geschlossenen Form von $1, 0, 1, 0, \ldots$

1. Mittels Erzeugende Funktion $B(x) = \sum_{n\geq 0} x^{2n}$.
   - Wir substitutieren $x \mapsto x^2$ in der geometrischen Reihe.
   - Dies liefert $B(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
2. Kumulative Summe der Folge $1, -1, 1, -1$ liefert $1, 0, 1, 0, \ldots$
   - $1, -1, 1, -1, \ldots$ besitzt die Erzeugende Funktion $G(-x) = \frac{1}{1+x}$.
   - D.h. $B(x) = G(x)G(-x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}$
3. Addition von $1, -1, 1, -1, \ldots$ mit $1, 1, 1, 1, \ldots$ liefert $2, 0, 2, 0, \ldots$
   - $1, -1, 1, -1, \ldots$ besitzt die Erzeugende Funktion $G(-x) = \frac{1}{1+x}$.
   - D.h. $B(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$.

Polyas Geldwechsel

Definition Polyas Geldwechselproblem

Gegeben: Betrag n Cent, Münzen $1, 5, 10$ Cent
Gesucht: #(Möglichkeiten), n mit den Münzen zu zahlen

Lösungsansatz:

- Sei a_n die Anzahl Möglichkeiten, n mit 1-Cent Münzen zu zahlen.
- Wir erhalten die Folge $(a_n)_{n\geq 0} = 1, 1, 1, 1, \ldots$
- Erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\geq 0}$ ist $A(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- Sei b_n die Anzahl Möglichkeiten, n mit 5-Cent Münzen zu zahlen.
- Dann gilt $(b_n)_{n\geq 0} = 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots.$
- Die Erzeugende Funktion ist $B(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x^5}$.
- Analog definieren wir $C(x) = \frac{1}{1-x^{10}}$ für 10-Cent Münzen.

Divide and Conquer Lösung

Divide and Conquer für Polyas Geldwechselproblem:

- Betrachten zunächst nur Zahlungen mit 1- und 5-Cent Münzen.
- Für $k = 0, \ldots, n$ zahlen wir k mit 1 Cent und $(n-k)$ mit 5 Cent.
- Dies liefert $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, d.h. die Faltung von $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$.
- Die Faltung können wir mittels Produkt $A(x) \cdot B(x)$ berechnen.
- $[x^n]A(x)B(x)$ liefert die Anzahl der Möglichkeiten, den Betrag n mit 1-Cent und 5-Cent Münzen zu zahlen.
- Nehmen wir noch 10-Cent hinzu, so erhalten wir
$$A(x)B(x)C(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}}.$$
- $[x^n]A(x)B(x)C(x)$ ist die Lösung von Polyas Geldwechselproblem.

Ziel: Geschlossene Form für $[x^n]A(x)B(x)C(x)$ als Funktion von n.

Beispiel für eine geschlossene Form

Satz Lineare Rekursion

Sei $a_n = a_{n-1} + 1$ für $n \geq 1$, $a_0 = 1$. Dann gilt $a_n = n + 1$ für alle $n \geq 0$.

Beweis:

- Wir stellen die Erzeugenden Funktion $A(x)$ geschlossen dar als

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_{n-1}+1)x^n \\
&= 1 + x\sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} x^n \\
&= x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} x^n = x\cdot A(x) + \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}
$$

- Auflösen nach $A(x)$ liefert $A(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- Wir kennen bereits die Reihenentwicklung $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$.
- Einsetzen: $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$.
- Koeffizientenvergleich liefert geschlossene Form $a_n = n + 1$.

Strategie für geschlossene Form

Strategie zum Finden einer geschlossenen Form

1. Aufstellen der Erzeugenden Funktion $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
2. Einsetzen von Anfangswerten und Rekursionsgleichung.
3. Darstellung aller a_n durch $A(x)$.
4. Auflösen nach $A(x)$ liefert eine geschlossene Form $f(x)$.
5. Entwicklung von $f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n$ als formale Potenzreihe. Wir verwenden hier als Hilfsmittel die Partialbruchzerlegung.
6. Koeffizientenvergleich liefert geschlossene Form $a_n = f_n$.

Ableiten von $G(x)$

Lemma Partialbruchlemma

Für alle $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{(1-ax)^k} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} a^n x^n$.

Beweis:

- Ableiten der geometrischen Reihe liefert $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- Erneutes Ableiten führt zu $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.
- k-maliges Ableiten ergibt $\sum_{n\geq k} n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.
- Daraus folgt $\sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
- Wir erhalten $\frac{1}{(1-ax)^k} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} a^n x^n$.

Partialbruchzerlegung

Satz Partialbruchzerlegung

Seien $f, g \in \mathbb{R}[x]$ mit $f = (1 - a_1 x)^{k_1} \cdot \ldots (1 - a_r x)^{k_r}$ und $\mathrm{grad}(g) < \mathrm{grad}(f)$. Dann existieren $g_i(x), i \in [r]$ mit $\mathrm{grad}(g_i) < k_i$ und

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_1(x)}{(1-a_1 x)^{k_1}} + \ldots + \frac{g_r(x)}{(1-a_r x)^{k_r}}.$$

Beweis:

- Wir suchen g_i der Form $g(x) = \sum_{i=1}^{r} g_i(x) \prod_{j \in [r] \setminus \{i\}} (1 - a_j x)^{k_j}$.
- $\mathrm{grad}(g_i) < k_i$, d.h. jedes g_i besitzt höchstens k_i Koeffizienten.
- Insgesamt gibt es $\sum_{i=1}^{r} k_i = \mathrm{grad}(f)$ viele Koeffizienten der g_i.
- Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhalten wir $\mathrm{grad}(f)$ viele Gleichungen für unsere $\mathrm{grad}(f)$ viele Unbekannte.

Bsp. Partialbruchzerlegung

Beispiel: Partialbruchzerlegung

- $g(x) = x, f(x) = x^2 - 1$. Dies liefert den Ansatz
$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}.$$
- Multiplikation mit $f(x)$ führt zu
$$x = a(x-1) + b(x+1) = (a+b)x - a + b.$$
- Koeffizientenvergleich ergibt
$$\left|\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ -a+b & = & 0 \end{array}\right|.$$
- Damit erhalten wir $a = b = \frac{1}{2}$, d.h.
$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(G(-x) + G(x)).$$

Reflektiertes Polynom

Definition Reflektiertes Polynom

Sei $f(x) = f_0 + f_1 x + \ldots + f_n x^n \in \mathbb{R}[x]$. Dann heißt $f^R(x) = f_n + f_{n-1} x + \ldots f_0 x^n$ das *reflektierte Polynom* von f.

- Es gilt $f^R(x) = x^n \cdot f(\frac{1}{x})$. Daraus folgt $f^R(\frac{1}{x}) = x^{-n} \cdot f(x)$.

Lemma Reflexionslemma

Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ mit $f^R(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$. Dann gilt $f(x) = (1 - a_1 x) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n x)$.

Beweis:

- Es gilt $f(x) = x^n f^R(\frac{1}{x}) = x(\frac{1}{x} - a_1) \cdot \ldots \cdot x(\frac{1}{x} - a_n) = (1 - a_1 x) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n x)$.