Paarweise Unabhängigkeit vs. Unabhängigkeit

Beispiel: Wir betrachten das Szenario von zuvor.

- Wissen bereits, dass A_1, A_2 und A_1, B unabhängig sind.
- Analog folgt, dass A_2 und B unabhängige Ereignisse sind.
- **Frage:** Was ist mit den Ereignisse $A_1 \cap A_2$ und B?
- Für $A_1 \cap A_2$ sind beide Würfe gerade, d.h. die Summe ist gerade.
- Damit gilt $\Pr[(A_1 \cap A_2) \cap B] = 0$, aber $\Pr[A_1 \cap A_2] \cdot \Pr[B] > 0$.
- D.h. die Ereignisse $A_1 \cap A_2$ und B sind abhängig.

Definition Unabhängigkeit von n Ereignissen

Sei Ω ein Wsraum mit $A_1, \ldots, A_n \in \Omega$. Wir nennen $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, falls $\Pr[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$ für alle $I \subseteq [n]$.

Eigenschaft von Unabhängigkeit

Lemma Unabhängige Ereignisse

Sei Ω ein Wsraum mit unabhängigen Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$. Dann gilt für alle $s \in \{0,1\}^n$ dass $\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}]$, wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Beweis: per Induktion über die Anzahl k der Nullen in s.

- **IA** für $k = 0$, d.h. $s = 1^n$. Damit gilt
$$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \ldots \Pr[A_n].$$
- **IS** $k-1 \to k$: s enthalte k Nullen, oBdA $s_1 = 0$. Es gilt
$$\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}].$$
- Nach IV können wir dies schreiben als
$$\begin{aligned} & \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] - \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ = \; & (1 - \Pr[A_1]) \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ = \; & \Pr[\bar{A}_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}]. \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Rückrichtung des Lemmas gilt ebenfalls.

Unabhängigkeit der Gegenereignisse

Korollar Unabhängigkeit der Gegenereignisse

Sei Ω ein Wsraum mit unabhängigen Ereignisse A_1, A_2. Dann sind $A_1, \bar{A}_2$ und $\bar{A}_1, A_2$ und $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ jeweils unabhängig.

Beweis:

- Aus Unabhängigkeit von A_1, A_2 folgt für $s = (1, 0)$, dass
$$\Pr[A_1 \cap \bar{A}_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[\bar{A}_2].$$
- Die beiden anderen Fälle folgen für $s = (0, 1)$ bzw. $s = (0, 0)$.

Schnitt, Vereinigung unabhängiger Ereignisse

Lemma Unabhängigkeit abgeschlossen unter $\cap$, $\cup$

Sei Ω ein Wsraum mit unabhängigen Ereignisse A, B, C. Dann sind

1. $A \cap B, C$ unabhängig.
2. $A \cup B, C$ unabhängig.

Beweis:

- **Schnitt:** Es gilt

  $$\Pr[(A \cap B) \cap C] = \Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C] = \Pr[A \cap B] \cdot \Pr[C].$$

- **Vereinigung:** Es gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C] \\
&= (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]) \cdot \Pr[C] \\
&= \Pr[A \cup B] \cdot \Pr[C].
\end{aligned}$$

Rechnen mit unabhängigen Ereignissen

Szenario:

- Routen R_1, R_2 zwischen einem Sender und einem Empfänger.
- R_1 geht durch die beiden Knoten k_1, k_2, R_3 führt durch k_3.
- Jeder Knoten ist unabhängig mit Ws p intakt.
- **Frage:** Wie groß ist die Ws, dass eine der Routen verfügbar ist?

- Sei $R_i =$"Route i ist verfügbar" für $i = 1, 2$.
- Sei $K_i =$"Knoten j ist verfügbar" für $j \in [3]$.
- Dann gilt $\Pr[R_1] = \Pr[K_1 \cap K_2] = \Pr[K_1] \cdot \Pr[K_2] = p^2$.
- Ferner ist $\Pr[R_2] = p$. Wir sind interessiert an

$$\begin{aligned}
\Pr[R_1 \cup R_2] &= 1 - \Pr[\overline{R_1 \cup R_2}] = 1 - \Pr[\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2] \\
&= 1 - \Pr[\bar{R}_1] \cdot \Pr[\bar{R}_2] = 1 - (1 - p^2)(1 - p) \\
&= p + p^2 + p^3.
\end{aligned}$$

Zufallsvariable und Dichtefunktion

Definition Zufallsvariable

Sei Ω ein Wsraum. Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Zufallsvariable* mit Wertebereich $W_X := X(\Omega) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = y\}$.

Sei $A = X^{-1}(y) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = y\}$. Dann definieren wir $\Pr[X = y] := \Pr[A]$ und $\Pr[X \leq y] := \sum_{x \in W_X, x \leq y} \Pr[X = x]$.

Beispiel: dreimaliger Münzwurf

- Wsraum $\Omega = \{K, Z\}^3$ für Kopf und Zahl.
- $Y : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$ beschreibe die Anzahl von Kopf.
- Es gilt $\Pr[Y = 0] = \Pr[(Z, Z, Z)] = \frac{1}{8}$. Ferner gilt
$$\Pr[Y = 1] = \Pr[(K, Z, Z)] + \Pr[(Z, K, Z)] + \Pr[(Z, Z, K)] = \frac{3}{8}.$$
- Analog folgern wir $\Pr[Y = 2] = \frac{3}{8}$ und $\Pr[Y = 3] = \frac{1}{8}$.
- Man beachte, dass die sogenannte Dichtefunktion f_X von X mit
$$f_X : W_X \to [0, 1] \text{ und } x \mapsto \Pr[X = x]$$
einen Wsraum auf W_X definiert.

Erwartungswert

Definition Erwartungswert

Sei X eine Zufallsvariable. Der *Erwartungswert* von X ist definiert als

$$E[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x],$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

Beispiel: Sei Y definiert wie auf der Folie zuvor.

- Es gilt $E[Y] = \sum_{i=0}^{3} i \cdot \Pr[Y = i] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.
- D.h. die erwartete Anzahl von Kopf bei 3 Münzwürfen ist $\frac{3}{2}$.

Beispiel Erwartungswert

Szenario: Münzwurfspiel in einem Spielcasino

- Es wird eine Münze geworfen, bis zum erstem Mal Kopf erscheint.
- Sei k die Anzahl der Würfe.
- Falls $k = \begin{cases} \text{ungerade} & \text{Spieler zahlt } k \text{ Euro an die Bank} \\ \text{gerade} & \text{Bank zahlt } k \text{ Euro an den Spieler} \end{cases}$.
- **Frage:** Was ist der erwartete Gewinn der Bank?

- Wir definieren eine Zufallsvariable $G : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ für den Gewinn
$$G(k) = \begin{cases} k & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ -k & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}.$$
- Es gilt $\Pr[\text{“Anzahl Würfe ist } k\text{”}] = 2^{-k}$ und damit
$E[G] = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{9}$.
- Man überprüfe analog die Konvergenz von
$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1}k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Erwartungswert muss nicht definiert sein

Beispiel:

- Wir betrachten ein modifiziertes Spiel mit dem Gewinn
$$G(k) = \begin{cases} 2^k & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 2^{-k} & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}.$$
- Dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} 2^k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1^{k-1}$.
- D.h. $E[G]$ ist nicht definiert, da die Summe nicht konvergiert.

- Casino-Spiel mit einer Münze, die mit Ws p Kopf zeigt.
- Sei $X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable für die Anzahl der Münzwürfe.
- Es gilt $\Pr[X = k] = (1-p)^{k-1} p$ und damit

$$E[X] = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

Linearität des Erwartungswerts

Satz Linearität des Erwartungswerts

Sei X eine Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$E[aX + b] = a \cdot E[X] + b.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E[aX+b] &= \sum_{x \in W_X} (ax+b) \cdot \Pr[X = x] \\ &= a \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] + b \cdot \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \\ &= a \cdot E[X] + b \end{aligned}$$

Varianz und Standardabweichung

Definition Varianz und Standardabweichung

Sei X eine Zufallsvariable. Dann definieren wir die *Varianz* von X als $\mathrm{Var}[X] := E[(X - E[X])^2]$. Mit $\sqrt{\mathrm{Var[X]}}$ bezeichnen wir die *Standardabweichung* von X.

Viel Erfolg in der Klausur am Do., den 26.02.09!