Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Kryptologie und IT-Sicherheit
Prof. Dr. Alexander May
M. Ritzenhofen, M. Mansour Al Sawadi, A. Meurer

Lösungsblatt zur Vorlesung

Diskrete Mathematik 1

WS 2008/09

Blatt 3 / 04. November 2008 / Abgabe bis 11. November 2008, **08.00 Uhr**, in die Kästen auf NA 02

AUFGABE 1 (6 Punkte)**:**

(a) Gegeben sei die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 48.$$

Wieviele ganzzahlige Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ mit $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 6$ gibt es?

(b) Wieviele achtstellige Zahlen (inklusive der Zahlen mit führenden Nullen) mit Quersumme 13 gibt es?

Lösungsvorschlag:

(a) Hier werden ganzzahlige Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ mit $x_i \geq 0$ gesucht, die in Summe 48 bilden. Diese Lösungen entsprechen genau den ganzzahligen Lösungen y_i mit $y_i \geq 1$ der Gleichung

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 48 + 6 = 54$$

(Vorlesung). Die Anzahl der möglichen Lösungen $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ entspricht gerade der Anzahl der geordneten Zahlpartitionen von 54. Also gibt es genau $\binom{48+6-1}{6-1} = 2869685$ Lösungen.

(b) Gesucht sind hier alle ganzzahligen Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ mit $0 \leq x_i \leq 9$ der Gleichung:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 13.$$

Erste Variante Wir behandeln das Problem in Teilproblemen:

1. Wir nehmen an, die erste Ziffer unserer Zahl sei $z \in \{0, \dots, 9\}$. Wir überlegen uns nun, wieviele Möglichkeiten es gibt, mit Zahlen zwischen 0000000 und 9999999 die Quersumme $13 - z$ zu erreichen. Wir bezeichnen diese im Folgenden mit $Q(13 - z)$.

2. Wir summieren dann einfach über alle möglichen Wahlen der ersten Zahl:

$$\text{Anzahl aller Zahlen} = \sum_{z=0}^{9} Q(13-z)$$

Um 1. zu lösen, überlegen wir uns, wieviele Möglichkeiten es gibt, die Zahl $13-z$ mit 7 nicht negativen ganzen Zahlen darzustellen. Es sind

$$\binom{(13-z)+7-1}{7-1} = \binom{19-z}{6}.$$

Darin sind allerdings

$$\sum_{i=10}^{13-z} \binom{((13-z)-i)+6-1}{6-1} = \sum_{i=10}^{13-z} \binom{(18-z)-i}{5}$$

Summen enthalten, bei denen einer der Summanden $i \geq 10$ ist. (Es kann höchstens einer der Summanden größer als 10 werden, da die Summe der restlichen dann nur noch $13-i-z \leq 3-z$ beträgt.)
Wir können obigen Term weiter vereinfachen, in dem wir die Substitution $j=(18-z)-i$ durchführen. Wir zählen dann (in umgekehrter Reihenfolge) von $j=(18-z)-(13-z)=5$ bis $j=(18-z)-10=8-z$. Es ergibt sich die folgende Anzahl:

$$\sum_{j=5}^{8-z} \binom{j}{5}.$$

Diese Rechnung gilt für alle Stellen, d.h. wenn wir alle Summen entfernen, die an einer der sieben Stellen einen Summanden ≥ 10 enthalten, erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$Q(13-z) = \binom{19-z}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{8-z} \binom{j}{5}.$$

Wir brauchen nun nur noch einzusetzen. Es gilt für $z=0,\ldots,9$:

$$Q(13-0) = \binom{19}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{8-0} \binom{j}{5} = 27132 - 7(1+6+21+56) = 26544.$$

$$Q(13-1) = \binom{19-1}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{8-1} \binom{j}{5} = 18564 - 7(1+6+21) = 18368.$$

$$Q(13-2) = \binom{19-2}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{8-2} \binom{j}{5} = 12376 - 7(1+6) = 12327.$$

$$Q(13-3) = \binom{19-3}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{8-3} \binom{j}{5} = 8008 - 7(1) = 8001.$$

$$Q(13-4) = \binom{19-4}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{8-4} \binom{j}{5} = 5005 - 0 = 5005.$$

$$Q(13-5) = \binom{19-5}{6} - 7 \cdot \sum_{j=4}^{8-5} \binom{j}{5} = 3003.$$

$$Q(13-6) = \binom{13}{6} = 1716.$$

$$Q(13-7) = \binom{12}{6} = 924.$$

$$Q(13-8) = \binom{11}{6} = 462.$$

$$Q(13-9) = \binom{10}{6} = 210.$$

Wir addieren und erhalten also $\sum_{z=0}^{9} Q(z) = 76560$ Zahlen von 00000000 bis 99999999, die Quersumme 13 haben.

Zweite Variante Wir werden im Folgenden 8-stellige Zahlen mit Quersumme 13 mit Strings der Länge 20 aus 13 "$\star$" und 7 "$|$" darstellen, wobei eine Folge von "$\star$" einer Ziffer mit dem Wert der Anzahl der "$\star$" entspricht. Die "$|$" trennen die Ziffern. Zum Beispiel

$$11060221 = \star| \star || \star\star\star\star\star\star || \star\star| \star\star| \star\ .$$

Für die 20 Positionen ergeben sich $\binom{20}{7}$ Möglichkeiten, die Trennzeichen "$|$" zu verteilen, das entspricht der Anzahl der möglichen Darstellungen als geordnete Summe von 12 durch 8 Summanden. Dabei haben wir nun aber auch Darstellungen gezählt, die 10 oder mehr "$\star$" am Stück enthalten, was keiner Darstellung im 10er-System entspricht. Wir werden diese wieder abziehen und unterscheiden dazu zwei Fälle:

Erster Fall : Der String beginnt mit 10 "$\star$", dann gibt es für die restlichen $20-10 = 10$ Positionen $\binom{10}{7}$ Möglichkeiten, die 7 Trennzeichen "$|$" zu verteilen.

Zweiter Fall : Der String enthält den Teilstring "$|\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$". Dieser kann an den Positionen $1, 2, 3, \ldots, 8$ und 9 starten. In jedem dieser 9 Fälle gibt es $\binom{9}{6}$ Möglichkeiten, die 6 verbliebenen Trennzeichen "$|$" auf die 9 noch nicht belegten Plätze zu verteilen.

Wir erhalten folgende Formel:

$$\binom{20}{7} - \binom{10}{7} - 10 \cdot \binom{9}{6} = 76560\,.$$

AUFGABE 2 (6 Punkte)**:**
Für eine Kleingruppenarbeit sollen sich sieben Studenten in Gruppen aufteilen.

(a) Wieviele Möglichkeiten dazu gibt es, wenn sie maximal drei Gruppen bilden sollen?

(b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn sie genau drei Gruppen bilden sollen?

Eine Gruppe bestehend aus genau einer Person zählt in beiden Fällen auch als Gruppe.

Lösungsvorschlag:

In diesem Beispiel werden Schüler auf Gruppen verteilt. Dies entspricht dem Verteilen von Bällen auf Urnen. Dabei sind die Bälle unterscheidbar, da jeder Schüler ein Individuum ist. Die Urnen hingegen sind nicht unterscheidbar, da keiner Gruppe irgendeine Eigenschaft zugeordnet ist.

(a) Das Verteilen von 7 Schülern auf maximal drei Gruppen entspricht also einer beliebigen Abbildung von 7 unterscheidbaren Elementen in eine dreielementige Menge mit ununterscheidbaren Elementen. Davon gibt es nach Vorlesung

$$\sum_{k=1}^{3} S_{7,k} = S_{7,1} + S_{7,2} + S_{7,3} = 1 + 63 + 301 = 365.$$

(b) Das Verteilen von 7 Schülern auf genau drei Gruppen entspricht einer surjektiven Abbildung von 7 unterscheidbaren Elementen in eine dreielementige Menge mit ununterscheidbaren Elementen. Davon gibt es nach Vorlesung

$$S_{7,3} = 301.$$

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Zeigen Sie folgende Aussage kombinatorisch, ohne Induktion zu verwenden:

$$(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\underline{k}} b^{\underline{n-k}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu die injektiven Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, a+b\}$.

Lösungsvorschlag:

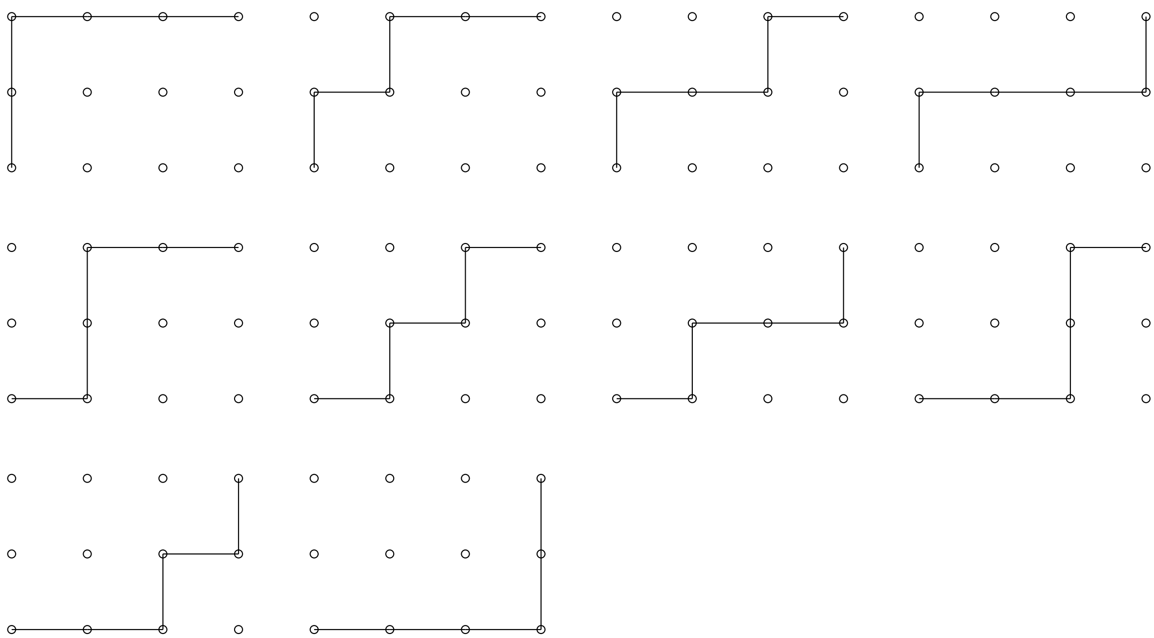
Man betrachte Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, a, a+1, \ldots, a+b\}$. Nach Vorlesung beträgt die Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, a, a+1, \ldots, a+b\}$ genau $(a+b)^{\underline{n}}$. Sei nun $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, a, a+1, \ldots, a+b\}$ eine solche injektive Abbildung. Dann gibt es n Elemente aus $\{1, \ldots, a, a+1, \ldots, a+b\}$ mit genau einem Urbild. Alle anderen Elemente haben kein Urbild.
Sei k die Anzahl der Elemente aus $\{1, \ldots, n\}$, die auf $\{1, \ldots, a\}$ abgebildet werden. Dabei kann k Werte von 0 bis n annehmen. Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, diese Elemente aus den n Elementen auszuwählen. Diese Elemente müssen injektiv auf die Menge $\{1, \ldots, a\}$ abgebildet werden. Dazu gibt es $a^{\underline{n}}$ Möglichkeiten.
Die $n-k$ übrigen der n Elemente müssen injektiv auf $\{a+1, \ldots, a+b\}$ abgebildet werden. Hierzu gibt es $b^{\underline{n-k}}$ Möglichkeiten.
Für ein festes k gibt es also genau $\binom{n}{k} a^{\underline{k}} b^{\underline{n-k}}$ verschiedene injektive Abbildungen. Die Fälle für verschiedene k sind disjunkt. Anwenden der Summenregel ergibt also:

$$(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\underline{k}} b^{\underline{n-k}}.$$

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten einen Gittergraphen $M_{n+1,m+1}$. (Das heißt, es gibt in jeder Zeile m Kanten. Ebenso gibt es in jeder Spalte n Kanten.) Zeichnen Sie für $n = 2, m = 3$ alle möglichen Wege von dem Punkt A links unten im Gittergraphen zum Punkt B rechts oben im Gittergraphen, die stets nach rechts oder nach oben gehen.
Zeigen Sie dann, dass die Anzahl der verschiedenen Wege von dem Punkt A links unten im Gittergraphen zum Punkt B rechts oben im Gittergraphen für allgemeine Gittergraphen $M_{n+1,m+1}$ gleich $\binom{m+n}{n}$ ist.

Lösungsvorschlag:

Hier zunächst alle möglichen Pfade für $M_{3,4}$.



Ein Weg von A nach B der gesuchten Form besteht aus $m + n$ Kanten. Davon gehen m Kanten von links nach rechts und n Kanten von unten nach oben. Um alle möglichen Wege abzudecken, wählt man aus den $m + n$ möglichen Positionen die n Positionen der Kanten aus, die nach oben führen sollen. Dadurch werden die Positionen der Kanten, die von links nach rechts gehen, mit festgelegt. Dies entspricht ungeordnetem Ziehen ohne Zurücklegen. Es gibt also

$$\binom{m+n}{n} \text{ mögliche Wege.}$$