

Äquivalente lineare Codes

Definition Äquivalenz von linearen Codes

Sei C ein linearer Code mit Generatormatrix G . Die durch Kombination der drei elementaren Matrixoperationen auf G

- 1 Vertauschen von zwei Zeilenvektoren
- 2 Vertauschen von zwei Spaltenvektoren
- 3 Addition eines Zeilenvektors zu einem anderen Zeilenvektor

entstehenden Codes bezeichnen wir als zu C *äquivalente Codes*.

Fakt Systematische Codes

Sei C ein linearer $[n, k]$ -Code mit Generatormatrix G . Dann gibt es einen zu C äquivalenten Code C' mit Generatormatrix in linker Standardform $G' = (I_k | M_{k, n-k})$. C' nennt man *systematischen Code*.

- Für systematische C' : $(x_1, \dots, x_k)G' = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k})$.
- y_1, \dots, y_{n-k} nennt man die Redundanz der Nachricht.

Umwandlung Generatormatrix in Parity Check Matrix

Satz Konversion von Generatormatrix in Parity Check Matrix

Sei C ein linearer $[n, k]$ -Code mit Generatormatrix $G = [I_k | A]$. Dann ist

$$P = [A^t | I_{n-k}]$$

eine Parity Check Matrix für C .

Sei C' der Code mit Parity Check Matrix P :

① Zeigen: $C \subseteq C'$.

▶ Für alle Zeilen \mathbf{g}_i von G gilt $\mathbf{g}_i P^t = \mathbf{0}$, denn j -ter Eintrag von $\mathbf{g}_i P^t$:

$$(0 \dots 1 \dots 0 a_{i1} \dots a_{ik}) \cdot (a_{1j} \dots a_{kj} 0 \dots 1 \dots 0) = a_{ij} + a_{ij} = 0$$

▶ Aus $\mathbf{g}_i P^t = \mathbf{0}$ folgt $C \subseteq C'$.

② Zeigen: $\dim(C) = \dim(C')$

▶ P hat $n - k$ linear unabhängige Zeilen.

▶ D.h. Dualcode $(C')^\perp$ hat Generatormatrix P und Dimension $n - k$.

$$\dim(C') = n - \dim((C')^\perp) = n - (n - k) = k = \dim(C).$$

Hamming-Matrix $H(h)$ und Hammingcode $\mathcal{H}(h)$

- Parametrisiert über die Zeilenanzahl h .
- Spaltenvektoren sind Binärdarstellung von $1, 2, \dots, 2^h - 1$.
- Bsp :

$$H(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hammingcode $\mathcal{H}(h)$ besitzt die Parity Check Matrix $H(h)$.
- Hammingcodes unabhängig entdeckt von Golay (1949) und Hamming (1950).

Satz Hammingcode

Der Hammingcode $\mathcal{H}(h)$ mit Parity Check Matrix $H(h)$ ist ein linearer $[n, k, d]$ -Code mit den Parametern

$$n = 2^h - 1, k = n - h \text{ und } d = 3.$$

k und d bei Hammingcodes

- $H(h)$ enthält die h Einheits-Spaltenvektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h$.
 - Daraus folgt, die Zeilenvektoren von $H(h)$ sind linear unabhängig.
 - D.h. $H(h)$ ist eine Generatormatrix des dualen Codes $\mathcal{H}(h)^\perp$.
 - Damit ist $\dim(\mathcal{H}(h)^\perp) = h$ und $k = \dim(\mathcal{H}(h)) = n - h$.
-
- Je zwei Spalten in $H(h)$ sind paarweise verschieden.
 - Die minimale Anzahl von linear abhängigen Spalten ist mindestens 3, d.h. $d(\mathcal{H}(h)) \geq 3$.
 - Die ersten drei Spalten sind stets linear abhängig, d.h. $d(\mathcal{H}(h)) = 3$.

Dekodierung mit Hammingcodes

Satz Korrigieren eines Fehlers

Sei $\mathbf{c} \in \mathcal{H}(h)$ und $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{e}_i$ für einen Einheitsvektor $\mathbf{e}_i \in \mathbb{F}_2^{2^{h-1}}$. Dann entspricht das Syndrom $S(\mathbf{x})$ der Binärdarstellung von i .

- Es gilt $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i H(h)^t = (H(h)\mathbf{e}_i^t)^t$.
- D.h. $S(\mathbf{x})$ entspricht der i -ten Spalte von $H(h)$, die wiederum die Binärcodierung von i ist.

Bsp:

- Verwenden $\mathcal{H}(3)$ und erhalten $\mathbf{x} = 1000001$.

$$S(\mathbf{x}) = (1000001)H(3)^t = (110).$$

- Da 110 die Binärcodierung von 6 ist, kodieren wir zum nächsten Nachbarn 1000011.

Simplex Code: Dualcode des Hammingcodes

Satz Simplex Code

Der Dualcode des Hammingcodes $\mathcal{H}(h)$ wird als Simplex Code $\mathcal{S}(h)$ bezeichnet. $\mathcal{S}(h)$ ist ein $[2^h - 1, h, 2^{h-1}]$ -Code, bei dem für *alle* verschiedenen $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathcal{S}(h)$ gilt, dass $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = 2^{h-1}$.

- Hamming-Matrix $H(h)$ ist Generatormatrix von $\mathcal{S}(h) = \mathcal{H}(2)^\perp$.
- Da $\dim(\mathcal{S}(h)) = n - \dim(\mathcal{H}(h))$, ist $\mathcal{S}(h)$ ein $[2^h - 1, h]$ -Code.

- Es gilt $H(h+1) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ \hline & & & & & & \end{array} \right)$.

- Sei $\bar{\mathbf{c}}$ das Komplement von \mathbf{c} ist. Dann gilt

$$\mathcal{S}(h+1) = \{\mathbf{c}0\mathbf{c} | \mathbf{c} \in \mathcal{S}(h)\} \cup \{\mathbf{c}1\bar{\mathbf{c}} | \mathbf{c} \in \mathcal{S}(h)\}.$$

Distanz 2^{h-1} zwischen zwei Worten im Simplex Code

Beweis von $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = 2^{h-1}$ per Induktion über h

IV $h = 1$:

- $H(1) = (1)$, d.h. $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ und damit $d(0, 1) = 1 = 2^0$.

IS $h \rightarrow h + 1$:

- Fall 1: $d(\mathbf{c}0\mathbf{c}, \mathbf{c}'0\mathbf{c}') = 2 \cdot d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = 2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$.
- Fall 2: $d(\mathbf{c}1\bar{\mathbf{c}}, \mathbf{c}'1\bar{\mathbf{c}}') = d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') + d(\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}}') = 2 \cdot d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = 2^h$.
- Fall 3:

$$\begin{aligned}d(\mathbf{c}0\mathbf{c}, \mathbf{c}'1\bar{\mathbf{c}}') &= d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') + 1 + d(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}}') \\ &= d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') + 1 + (2^h - 1 - d(\mathbf{c}, \mathbf{c}')) = 2^h.\end{aligned}$$

Der Golay Code \mathcal{G}_{24} (Golay 1949)

- \mathcal{G}_{24} ist ein $[24, 12]$ -Code mit Generator-Matrix $G = [I_{12}|A]$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Distanz des Codes \mathcal{G}_{24}

Lemma $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^\perp$

\mathcal{G}_{24} ist selbst-dual, d.h. $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^\perp$.

- Man prüfe nach, dass für je zwei Zeilen $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j$ aus G gilt $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = 0$.
- D.h. $\mathcal{G}_{24} \subseteq \mathcal{G}_{24}^\perp$. Wegen $\dim(\mathcal{G}_{24}) = \dim(\mathcal{G}_{24}^\perp)$ folgt $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^\perp$.

Korollar Alternative Generatormatrix

Die Matrix $[A|I_{12}]$ ist ebenfalls eine Generatormatrix des \mathcal{G}_{24} .

- Wegen $G = [I_{12}|A]$ ist $[A^t|I_{24-12}] = [A|I_{12}]$ eine Parity Check Matrix für \mathcal{G}_{24} .
- Da $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^\perp$ ist $[A|I_{12}]$ ebenso eine Parity Check Matrix für \mathcal{G}_{24}^\perp .
- Da die Zeilen von $[A|I_{12}]$ linear unabhängig sind, ist $[A|I_{12}]$ eine Generatormatrix von $\mathcal{G}_{24}^{\perp\perp} = \mathcal{G}_{24}$.

Die Distanz des \mathcal{G}_{24}

Parameter des \mathcal{G}_{24}

\mathcal{G}_{24} ist ein $[24, 12, 8]$ -Code.

Zeigen zunächst, dass $w(\mathbf{c}) = 0 \pmod 4$ für alle $\mathbf{c} \in C$.

- Für jede Zeile \mathbf{g}_i aus G gilt: $w(\mathbf{g}_i) = 0 \pmod 4$.
- Seien $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j$ Zeilen aus G . Dann gilt

$$w(\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_j) = w(\mathbf{g}_i) + w(\mathbf{g}_j) - 2\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j.$$

- \mathcal{G}_{24} ist selbst-dual, d.h. $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = 0$. Damit gilt $w(\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_j) = 0 \pmod 4$.
- D.h. für jedes $\mathbf{c} = (((\mathbf{g}_{i_1} + \mathbf{g}_{i_2}) + \mathbf{g}_{i_3}) + \dots + \mathbf{g}_{i_\ell})$ folgt $4 | w(\mathbf{c})$.

Zeigen nun, dass $w(\mathbf{c}) > 4$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{G}_{24}, \mathbf{c} \neq 0$.

- Damit folgt $w(\mathbf{c}) \geq 8$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{G}_{24}, \mathbf{c} \neq 0$.
- Zweite Zeile von G ist Codewort mit Gewicht 8, d.h. $d(\mathcal{G}_{24}) = 8$.

$w(\mathbf{c}) > 4$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{G}_{24}$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$

- \mathbf{c} ist Linearkombination von $G_1 = [I_{12}|A]$ bzw. von $G_2 = [A|I_{12}]$.
- Sei $\mathbf{c} = LR$ mit $L, R \in \{0, 1\}^{12}$. Es gilt $w(L), w(R) \geq 1$.
- Sei $w(L) = 1$. Dann ist \mathbf{c} eine Zeile von G_1 und damit $w(\mathbf{c}) > 4$.
- Analog folgt für $w(R) = 1$, dass \mathbf{c} Zeile von G_2 ist mit $w(\mathbf{c}) > 4$.
- Sei $w(L) = w(R) = 2$, d.h. \mathbf{c} ist Linearkombination zweier Zeilen.
- Es ist nicht schwer zu prüfen, dass die Summe zweier Zeilen in G_1 bzw G_2 stets Gewicht größer 4 besitzt.

Der Golay Code \mathcal{G}_{23}

- \mathcal{G}_{23} entsteht aus \mathcal{G}_{24} durch Entfernen der letzten Spalte in G .

Parameter des \mathcal{G}_{23}

Satz \mathcal{G}_{23} ist ein perfekter $[23, 12, 7]$ -Code.

- Hammingdistanz von \mathcal{G}_{24} beträgt 8, d.h. Zeilen von G bleiben linear unabhängig nach Entfernen der letzten Spalte.
- Daraus folgt $\dim(\mathcal{G}_{23}) = \dim(\mathcal{G}_{24})$.
- $d(\mathcal{G}_{23}) \in \{7, 8\}$. 3. Zeile der Generatormatrix liefert $d(\mathcal{G}_{23}) = 7$.
- Erinnerung: \mathcal{G}_{23} ist perfekt wegen $M = 2^{12} = \frac{2^{23}}{V^{23}(\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor)}$.

Bedeutung von Hamming- und Golay-Codes

Fakt van Lint, Tietäväinen, Best, Hong

Alle binären nicht-trivialen perfekten Codes C besitzen die Parameter eines Hamming- oder Golay-Codes.

- 1 Falls C die Parameter eines Golay Codes besitzt, ist C äquivalent zu diesem Golay-Code.
- 2 Falls C linear ist und die Parameter eines Hamming-Codes besitzt, ist C äquivalent zu diesem Hamming-Code.

Reed-Muller Codes

- Reed-Muller Code $\mathcal{R}(r, m)$ ist definiert für $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq m$.
- Betrachten nur Reed-Muller Codes 1. Ordnung $\mathcal{R}(1, m) = \mathcal{R}(m)$.

Definition Rekursive Darstellung von Reed-Muller Codes

- 1 $\mathcal{R}(1) = \mathbb{F}_2^2 = \{00, 01, 10, 11\}$.
- 2 Für $m \geq 1$: $\mathcal{R}(m+1) = \{\mathbf{c}\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\} \cup \{\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\}$.

- $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine Generatormatrix für $\mathcal{R}(1)$.
- $\mathcal{R}(2) = \{0000, 0011, 0101, 0110, 1010, 1001, 1111, 1100\}$ mit Generatormatrix

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Parameter der Reed-Muller Codes

Satz Reed-Muller Parameter

$\mathcal{R}(m)$ ist ein linearer $(2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$ -Code. Für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(1) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ gilt $w(\mathbf{c}) = 2^{m-1}$.

IA: $m = 1$

- $\mathcal{R}(1)$ ist ein linearer $(2^1, 2^2, 2^0)$ -Code. 01, 10 besitzen Gewicht 2^0 .

IS: $m \rightarrow m + 1$

- $n = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$.
- $\{\mathbf{c}\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\}$ und $\{\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\}$ sind disjunkt, d.h. $k = 2 \cdot 2^{m+1} = 2^{m+2}$.
- Sei $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(m) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.
 - ▶ Für $\mathbf{c}\mathbf{c}$ gilt $w(\mathbf{c}\mathbf{c}) = 2w(\mathbf{c}) = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$.
 - ▶ Für $\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}}$ gilt $w(\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}}) = w(\mathbf{c}) + w(\bar{\mathbf{c}}) = 2^{m-1} + (2^m - 2^{m-1}) = 2^m$.
- Für $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{0}\mathbf{1}$ mit $w(\mathbf{0}\mathbf{1}) = 2^m$.
- Für $\mathbf{c} = \mathbf{1}$ gilt $\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{1}\mathbf{0}$ mit $w(\mathbf{1}\mathbf{0}) = 2^m$.

Reed-Muller Generatormatrizen

Satz Generatormatrix für $\mathcal{R}(m)$

Sei R_m eine Generatormatrix für $\mathcal{R}(m)$. Dann ist

$$R_{m+1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hline & & R_m & & & R_m \end{array} \right)$$

eine Generatormatrix für $\mathcal{R}(m+1)$.

- **Ann.:** \exists nicht-triviale Linearkombination, die $\mathbf{0}$ liefert.
- Linearkombination kann nicht nur die erste Zeile enthalten.
- D.h. es gibt eine nicht-triviale Linearkombination der Zeilen $2 \dots m+2$, die den Nullvektor auf der ersten Hälfte liefert. (Widerspruch: R_m ist Generatormatrix für $\mathcal{R}(m)$.)
- Sei C der Code mit Generatormatrix R_{m+1} .
- Für $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)$ gilt: $\mathbf{c}\mathbf{c} \in C$ und $\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}} \in C$. D.h. $\mathcal{R}(m+1) \subseteq C$.
- $\dim(C) = m+1 = \dim(\mathcal{R}(m+1))$ und damit $C = \mathcal{R}(m+1)$.

Charakterisierung der Generatormatrizen

Bsp:

$$R_3 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Streiche Einserzeile aus R_m . Dann

- besitzen die Zeilenvektoren Länge m und
- bestehen aus Binärkodierungen von $0, 1, \dots, 2^m - 1$.

Vergleich von Hamming und Reed-Muller Codes

	$\mathcal{H}(m)$	$\mathcal{R}(m)$
Codewortlänge	$2^m - 1$	2^m
Anzahl Codeworte	$2^{2^m - 1 - m}$	2^{m+1}
Distanz	3	2^{m-1}

Dekodierung von Reed-Muller Codes

- $\mathcal{R}(m)$ kann $\left\lfloor \frac{2^{m-1}-1}{2} \right\rfloor = 2^{m-2} - 1$ Fehler korrigieren.
- Syndrom-Tabelle besitzt $\frac{2^{2^m}}{2^{m+1}} = 2^{2^m-m-1}$ Zeilen.

Bsp: $\mathcal{R}(3)$ ist 1-fehlerkorrigierend.

$$R_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 + \alpha_3 \mathbf{r}_3 + \alpha_4 \mathbf{r}_4$. Es gilt

- $c_1 + c_5 = \alpha_1(r_{11} + r_{15}) + \alpha_2(r_{21} + r_{25}) + \alpha_3(r_{31} + r_{35}) + \alpha_4(r_{41} + r_{45}) = \alpha_1$
- $c_2 + c_6 = \alpha_1(r_{12} + r_{16}) + \alpha_2(r_{22} + r_{26}) + \alpha_3(r_{32} + r_{36}) + \alpha_4(r_{42} + r_{46}) = \alpha_1$
- Ebenso $\alpha_1 = c_3 + c_7 = c_4 + c_8$.

Mehrheitsdekodierung

- Suche für jede Zeile i Spaltenpaar (u, v) , so dass sich die Spalten u, v nur in der i -ten Zeile unterscheiden. Liefert Gleichung für α_j .
 - Für Zeile 1: $(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)$, d.h. im Abstand 4.
 - Für Zeile 2: $(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 8)$, d.h. im Abstand 2.
 - Für Zeile 3: $(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)$, d.h. im Abstand 1.
 - Für Zeile 4: nicht möglich.
-
- Erhalten für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jeweils 4 Gleichungen in verschiedenen c_j .
 - Falls $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{e}_i$, ist genau 1 von 4 Gleichungen inkorrekt.

Algorithmus Mehrheitsdekodierung Reed-Muller Code $\mathcal{R}(m)$

- 1 Bestimme $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ per Mehrheitsentscheid.
- 2 Berechne $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{r}_j$.
- 3 Falls $w(\mathbf{e}) \leq 2^{m-2} - 1$, dekodiere $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$.
- 4 Falls $w(\bar{\mathbf{e}}) \leq 2^{m-2} - 1$, dekodiere $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \bar{\mathbf{e}}$.

Beispiel Mehrheitsdekodierung

- Verwenden $\mathcal{R}(3)$ und erhalten $\mathbf{x} = 11011100$.
 - ▶ $\alpha_1 = x_1 + x_5 = 0$
 - ▶ $\alpha_2 = x_2 + x_6 = 0$
 - ▶ $\alpha_3 = x_3 + x_7 = 0$
 - ▶ $\alpha_4 = x_4 + x_8 = 1$
- Mehrheitsentscheid liefert $\alpha_1 = 0$.
 - ▶ $\alpha_2 = x_1 + x_3 = 1$
 - ▶ $\alpha_2 = x_2 + x_4 = 0$
 - ▶ $\alpha_2 = x_5 + x_7 = 1$
 - ▶ $\alpha_2 = x_6 + x_8 = 1$
- Mehrheitsentscheid liefert $\alpha_2 = 1$ und analog $\alpha_3 = 0$.
- $\mathbf{e} = \mathbf{x} - 0 \cdot \mathbf{r}_1 - 1 \cdot \mathbf{r}_2 - 0 \cdot \mathbf{r}_3 = 11011100 - 00110011 = 11101111$.
- $w(\bar{\mathbf{e}}) \leq 1$, d.h. $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \bar{\mathbf{e}} = 11001100$.