Diskrete Mathematik II

Alexander May

Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Sommersemester 2008

Organisatorisches

- Vorlesung: **Mo 12-14** in HIA , **Di 10-11** in NA 6/99
  (3+1 SWS, 6.75 CP)
- Übung: **Di 11-13** in ND2/99
  - Assistent: **Mathias Herrmann**, Korrektor: **M. Mansour Al-Sawadi**
  - Übung ist zweiwöchentlich: gerade/ungerade Woche
  - Übungsaufgaben werden korrigiert.
  - Gruppenabgaben bis 4 Personen
  - Bonussystem:
    1/3-Notenstufe für 50%, 2/3-Notenstufe für 75%
    Gilt nur, wenn man die Klausur besteht!
  - Musterlösungen
- Klausur: Ende Juli

Abstimmungen

- Zusammensetzung des Auditoriums
- Vorlesungsform
  - Folienunterstützter Tafelanschrieb
  - Nur Tafelanschrieb (Folien als Skript)

Themengebiete

1. Kodierungstheorie
   - Komprimierende Codes
   - Beispiel Anwendungen: Kommunikation (Mobilfunk, Internet), Speicher (MP3)
   - Fehlererkennende Codes
   - Ausfalltolerante Codes
   - Beispiel Anwendungen: Mobilfunk, Internet, CD, Secret Sharing, Kryptosystem
2. Algorithmische Zahlentheorie
   - Quadratische Reste
   - Beispiel Anwendungen: Zufallszahlengenerator, Identity-Based Encryption
   - Elliptische Kurven
   - Beispiel Anwendungen: Kryptosystem, Primzahltest
3. Komplexitätstheorie
   - Klassen P und NP
   - Reduktionen
   - Anwendung: Sicherheitsbeweise in der Kryptographie

Weiterführende Referenzen Kodierungstheorie

- M. Sudan, “Algorithmic Introduction to Coding Theory”, Skript MIT
- W. Trappe, L. Washington, “Introduction to Cryptography with Coding Theory”, Pearson 2006
- J. Blömer, “Algorithmische Codierungstheorie”, Skript Uni Paderborn
- J.H. van Lint, “Introduction to Coding Theory”, Springer 1991
- T. Ihringer, “Diskrete Mathematik”, Teubner 1994

Unser Modell

- Shannon 1948: Informationstheorie und Mathematik der Kommunikation
- Hamming 1950: Erste Arbeit über fehlerkorrigierende Codes

Modell:
Sender $\rightarrow$ Kodierer $\rightarrow$ Kanal $\rightarrow$ Dekodierer $\rightarrow$ Empfänger

- Kanal ist bandbreitenbeschränkt (Kompression)
- Kanal ist fehleranfällig (Fehlerkorrektur)
  - Bits können ausfallen: $0 \rightarrow \epsilon$, $1 \rightarrow \epsilon$
  - Bits können kippen: $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$

Motivierendes Bsp: Datenkompression

Szenario:

- Kanal ist **fehlerfrei**.
- Übertragen gescannte Nachricht:
  Wahrscheinlichkeiten: 99% weißer, 1% schwarzer Punkt.
- Weiße Punkte werden mit 0 kodiert, schwarze mit 1.

Kodierer:

- Splitten Nachricht in Blocks der Größe 10.
- Wenn Block x=0000000000, kodiere mit 0, sonst mit 1x.
- 1 dient als Trennzeichen beim Dekodieren.

Dekodierer:

- Lese den Code von links nach rechts.
- Falls 0, dekodiere 0000000000.
- Falls 1, übernehme die folgenden 10 Symbole.

Erwartete Codelänge

Sei $q := \Pr[\text{Block ist } 0000000000] = (0.99)^{10} \geq 0.9$.
Sei Y Zufallsvariable für die Codelänge eines 10-Bit Blocks:

$$E[Y] = \sum_{y \in \{0,1x\}} |y| \cdot Pr(Y = y) = 1 \cdot q + 11 \cdot (1 - q) = 11 - 10q.$$

- D.h. erwartete Länge der Kodierung eines 10-Bit Blocks ist
$$11 - 10q \leq 2 \text{ Bit}.$$
- Datenkompression der Nachricht auf 20%.
- Können wir noch stärker komprimieren?
- Entropie wird uns Schranke für Komprimierbarkeit liefern.

Ausblick: fehlerkorrigierende Codes

Szenario: Binärer symmetrischer Kanal

- Bits 0,1 kippen mit Ws $p, p < \frac{1}{2}$ zu 1,0. (Warum $< \frac{1}{2}$?)
- Korrekte Übertragung $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ mit Ws $1 - p$.
- In unserem Beispiel $p = 0.1$.

Kodierer:

- Verdreifache jedes Symbol, d.h. $0 \mapsto 000$, $1 \mapsto 111$
- Repetitionscode der Länge 3.

Dekodierer:

- Lese den Code in 3er-Blöcken.
- Falls mindestens zwei Symbole 0 sind, dekodiere zu 0.
- Sonst dekodiere zu 1.

Ws Dekodierfehler

Symbol wird falsch dekodiert, falls mind. zwei der drei Bits kippen.

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Ws}(\text{Bit wird falsch dekodiert}) \\
= \; & \mathrm{Ws}(\text{genau 2 Bits kippen}) + \mathrm{Ws}(\text{genau 3 Bits kippen}) \\
= \; & 3 * p^2 * (1 - p) + p^3 = 3 * 10^{-2} * (1 - 10^{-1}) + 10^{-3}
\end{aligned}
$$

- Ohne Kodierung Fehlerws von 0.1.
- Mit Repetitionskode Fehlerws von $\approx$ 0.03.
- Nachteil: Codierung ist dreimal so lang wie Nachricht.
- **Ziel:**
  Finde guten Tradeoff zwischen Fehlerws und Codelänge.

Ausblick: fehlertolerante Codes

Szenario: Binärer Ausfallkanal

- Bits 0,1 gehen mit Ws $p, p < \frac{1}{2}$ verloren, d.h. $0 \mapsto \epsilon$ bzw. $1 \mapsto \epsilon$.
- Korrekte Übertragung $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ mit Ws $1 - p$.
- In unserem Beispiel $p = 0.1$.

Verwenden wieder Repetitionskode der Länge 3.

- Fehler beim Dekodieren: Alle drei Symbole gehen verloren.
- $\mathrm{Ws}(\text{Bit kann nicht dekodiert werden}) = p^3 = 0.001$.
- Fehlerws kleiner beim Ausfallkanal als beim symmetrischen Kanal.

Definition Code

- Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Menge von Symbolen a_i
- Nachricht $m \in A^*$

Definition Code

Sei A ein Alphabet. Eine (binäre) *Codierung C des Alphabets A* ist eine injektive Abbildung

$$\begin{aligned} C: \qquad A &\rightarrow \{0,1\}^* \\ a_i &\mapsto C(a_i). \end{aligned}$$

Die *Codierung einer Nachricht* $m = a_{i_1} \ldots a_{i_\ell} \in A^*$ definieren wir

$$C(m) = C(a_{i_1}) \ldots C(a_{i_\ell}) \quad \text{(Erweiterung von } C \text{ auf } A^*\text{)}.$$

Die Abbildung C heißt *Code*.

Bezeichnungen Code

- Die Elemente $c_i := C(a_i)$ bezeichnen wir als *Codeworte*.
- Wir bezeichnen sowohl die Abbildung von Nachrichten auf Codeworte als auch die *Menge der Codeworte* mit dem Buchstaben C.
- Falls $C \subseteq \{0,1\}^n$ spricht man von einem *Blockcode* der Länge n. In einem Blockcode haben alle Codeworte die gleiche Länge.

Entschlüsselbarkeit von Codes

Szenario: Datenkompression in fehlerfreiem Kanal

Definition eindeutig entschlüsselbar

Ein Code heißt eindeutig entschlüsselbar, falls jedes Element aus $\{0,1\}^*$ Bild höchstens einer Nachricht ist. D.h. die Erweiterung der Abbildung C auf A^* muss injektiv sein.

Definition Präfixcode

Ein Code $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ heißt Präfixcode, falls es keine zwei Codeworte $c_i \neq c_j$ gibt mit

$$c_i \text{ ist Präfix (Wortanfang) von } c_j.$$

Beispiel

	a_1	a_2	a_3
C_1	0	0	1
C_2	0	1	00
C_3	0	01	011
C_4	0	10	11

- C_1 ist kein Code, da $C : A \to \{0,1\}^*$ nicht injektiv.
- C_2 ist nicht eindeutig entschlüsselbar, da $C : A^* \to \{0,1\}^*$ nicht injektiv.
- C_3 ist eindeutig entschlüsselbar, aber kein Präfixcode.
- C_4 ist ein Präfixcode.

Präfixcodes sind eindeutig entschlüsselbar.

Satz: Präfixcode eindeutig entschlüsselbar

Sei $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ ein Präfixcode. Dann kann jede Nachricht $C(m)$ in Zeit $\mathcal{O}(|C(m)|)$ eindeutig zu m decodiert werden.

- Zeichne binären Baum
  - Kanten erhalten Label 0 für linkes Kind, 1 für rechtes Kind.
  - Codewort $c_i = c_{i_1} \ldots c_{i_k}$ ist Label des Endknoten des Pfads von der Wurzel mit den Kantenlabeln $i_1, \ldots, i_n$
- **Präfixeigenschaft:** Kein einfacher Pfad von der Wurzel enthält zwei Knoten, die mit Codeworten gelabelt sind.
- Codewort c_i ist Blatt in Tiefe c_i

Algorithmus Dekodierung Präfix

Algorithmus Dekodierung Präfix

1. Lese $C(m)$ von links nach rechts.
2. Starte bei der Wurzel. Falls 0, gehe nach links. Falls 1, gehe nach rechts.
3. Falls Blatt mit Codewort $c_i = C(a_i)$ erreicht, gib a_i aus und iteriere.

Laufzeit: $\mathcal{O}(|C(m)|)$

Woher kommen die Nachrichtensymbole?

Modell

- *Quelle Q* liefert Strom von Symbolen aus A.
- Quellwahrscheinlichkeit: $\mathrm{Ws}(\text{ Quelle liefert } a_i) = p_i$
- Ws p_i ist unabhängig von der Zeit und vom bisher produzierten Strom (erinnerungslose Quelle)
- X_i: Zufallsvariable für die i-te Position im Strom, d.h.

$$\mathrm{Ws}(X_i = a_j) = p_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \text{ und alle } i.$$

Ziel: Kodiere Elemente a_j mit großer Ws p_j mit kleiner Codewortlänge.

Kompakte Codes

Definition Erwartete Codewortlänge

Sei Q eine Quelle mit Alphabet $A = a_1, \ldots, a_n$ und Quellwahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$. Die Größe

$$E(C) := \sum_{i=1}^{n} p_i |C(a_i)|$$

bezeichne die erwartete Codewortlänge.

Definition Kompakter Code

Ein Code C heißt kompakt bezüglich einer Quelle Q, falls er *minimale erwartete Codewortlänge* besitzt.

Wann sind Codes eindeutig entschlüsselbar?

Definition Suffix

Sei C ein Code. Ein Folge $s \in \{0,1\}^*$ heißt Suffix in C falls

1. $\exists c_i, c_j \in C : c_i = c_j s$ oder
2. $\exists c \in C$ und einen Suffix s' in C: $s' = cs$ oder
3. $\exists c \in C$ und einen Suffix s' in C: $c = s's$.

- Bedingung 1: Codewort c_j lässt sich zu Codewort c_i erweitern.
- Bedingung 2: Codewort c lässt sich zu Suffix s' erweitern.
- Bedingung 3: Suffix s' lässt sich zu Codewort c erweitern.

Effiziente Berechnung von Suffixen

Algorithmus Berechnung Suffix

1. Setze $S := \emptyset, T := \emptyset$.
2. Für alle $c_i, c_j \in C \times C$: Falls es ein $s \in \{0,1\}^*$ gibt mit $c_i = c_j s$, füge s in S und T ein.
3. Solange $T \neq \emptyset$
   1. Entferne ein beliebiges s' aus T.
   2. Für alle $c \in C$: Falls es ein $s \in \{0,1\}^* \setminus S$ gibt mit $c = s's$ oder $s' = cs$, füge s zu S und T hinzu.

Laufzeit: $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$

- Schritt 2: $\mathcal{O}(n^2)$ Codewortpaare
- Suffixlänge ist durch $\max_i\{|c_i|\}$ beschränkt.
- Es kann höchstens $n \cdot \max_i\{|c_i|\}$ Suffixe geben.
- Schritt 3: $\mathcal{O}(n^2 \cdot \max_i\{|c_i|\})$
- **Polynomiell in der Eingabelänge**: n, $max_i\{|c_i|\}$

Beispiele Suffixberechnung

- Code $C_2 = \{0, 1, 00\}$
  - Suffix $s_1 = 0$, denn $c_3 = c_1 0$.
- Code $C_3 = \{0, 01, 011\}$
  - Suffix $s_1 = 1$, denn $c_2 = c_1 1$.
  - Suffix $s_2 = 11$, denn $c_3 = c_1 11$.
- Code $C_4 = \{0, 10, 110\}$
  - Keine Suffixe, da Präfixcode.
- Code $C_5 = \{1, 110, 101\}$
  - Suffix $s_1 = 10$, denn $c_2 = c_1 10$.
  - Suffix $s_2 = 01$, denn $c_3 = c_1 01$.
  - Suffix $s_3 = 0$, denn $s_3 = c_1 0$.
  - Suffix $s_4 = 1$, denn $c_3 = s_1 1$.

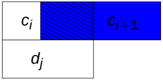
Kriterium für eindeutig entschlüsselbar

Eindeutig entschlüsselbar

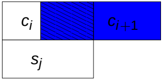
C ist ein eindeutig entschlüsselbarer Code $\Leftrightarrow$ Kein Suffix ist Codewort in C.

z.z.: C nicht eindeutig entschlüsselbar $\Rightarrow$ Suffix ist Codewort

- Zwei gleiche Folgen $c_1 \ldots c_n$ und $d_1 \ldots d_m$ von verschiedenen Codeworten
- Fall 1: Codewort c_i lässt sich zu d_j erweitern

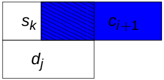


- Fall 2: Codewort c_i lässt sich zu Suffix s_j erweitern



Suffix ist Codewort

- Fall 3: Suffix s_k lässt sich zu Codewort d_j erweitern



- Nach jedem Schritt beginnt der konstruierte Suffix mit einem Codewortpräfix.
- Der zuletzt konstruierte Suffix ist identisch mit dem letzten Codewort von beiden Sequenzen.

Rückrichtung

z.z.: Suffix s ist ein Codewort $\Rightarrow$ C ist nicht eindeutig entschlüsselbar

- Suffix s ist aus Anwendungen der drei Regeln entstanden.
- Berechne die Kette zurück, aus der s entstanden ist.
  - Setze String $c^* \leftarrow s$. Iteriere:
  - 1. Fall $c_i = c_j s$: $c^* \leftarrow c_j c^*$, terminiere.
  - 2. Fall $s' = cs$: $c^* \leftarrow cc^*$, $s \leftarrow s'$.
  - 3. Fall $c = s's$: $c^* \leftarrow s'c^*$, $s \leftarrow s'$.
- Kette muss mit 1. Fall $c_i = c_j s'$ terminieren.
- Zwei verschiedene Entschlüsselungen:
  Eine beginnt mit c_i, die andere mit c_j.
- Beide sind gültig, da der letzte Suffix ein Codewort ist.

Beispiel: Für $C = 1, 110, 101$ erhalten wir für den Suffix 1 den String $c^* = 1101$ mit gültigen Dekodierungen $1|101$ und $110|1$.

Sätze von Kraft und McMillan

Satz von Kraft

Ein Präfixcode C für das Alphabet $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit Kodierungslängen $|C(a_j)| = \ell_j$ existiert gdw

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leq 1.$$

Satz von McMillan

Ein eindeutig entschlüsselbarer Code C für das Alphabet $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit Kodierungslängen $|C(a_j)| = \ell_j$ existiert gdw

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leq 1.$$

Präfixcodes genügen

Korollar

Ein Präfixcode C existiert gdw es einen eindeutig entschlüsselbaren Code C mit denselben Kodierungslängen gibt.

- Wir zeigen den Ringschluss für:
  $\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leq 1 \Rightarrow$ Präfix $\Rightarrow$ Eindeutig entschlüsselbar

  (Präfix $\Rightarrow$ Eindeutig entschlüsselbar: letzte Vorlesung)
- Gegeben sind Kodierungslängen ℓ_j. Gesucht ist ein Präfixcode mit $\ell_j = |C(a_j)|$.
- Definiere $\ell := \max\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$, $n_i :=$ Anzahl ℓ_j mit $\ell_j = i$.

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} = \sum_{j=1}^{\ell} n_j 2^{-j} \leq 1.$$

Beweis: $\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leq 1 \Rightarrow$ Präfix

Induktion über l:

- **IA** $\ell = 1$**:** $n_1 \leq 2$
- Können Präfixcode $C \subseteq \{0, 1\}$ für max. 2 Codeworte konstruieren.

- **IS** $\ell - 1 \to \ell$**:** $n_\ell \leq 2^\ell - 2^{\ell-1} n_1 - 2^{\ell-2} n_2 - \ldots 2n_{\ell-1}$
- **IV:** Präfixcode mit n_i Worten der Länge i, $i = 1, \ldots, \ell - 1$.
- Anzahl der Worte der Länge ℓ: 2^ℓ
- Anzahl der Worte der Länge ℓ mit Präfixen $n_1, \ldots, n_{\ell-1}$: $2^{\ell-1} n_1 + \cdots + 2n_{\ell-1}$.
- Können die n_ℓ Worte mit den verbleibenden $2^\ell - (2^{\ell-1} n_1 + \cdots + 2n_{\ell-1})$ Worten der Länge ℓ als Präfixcode kodieren.

Eindeutig entschlüsselbar $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leq 1$

- Sei C eindeutig entschlüsselbar mit $C(a_j) = \ell_j$, $\ell = max_j\{\ell_j\}$.
- Wählen $r \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachten

$$\left(\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j}\right)^r = \sum_{i=1}^{r\ell} n_i 2^{-i}$$

- Analog zum Beweis zuvor: n_i = Anzahl Strings aus $\{0,1\}^i$, die sich als Folge von r Codeworten schreiben lässt.
- C eindeutig entschlüsselbar: Jeder String aus $\{0,1\}^i$ lässt sich als höchstens eine Folge von Codeworten schreiben, d.h. $n_i \leq 2^i$.
- Damit gilt $\sum_{i=1}^{r\ell} n_i 2^{-i} \leq r\ell \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leq (r\ell)^{\frac{1}{r}}$
- Für $r \to \infty$ folgt $\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leq 1$.

Huffman Kodierung

Szenario: Quelle Q mit Symbole $\{a_1, \ldots, a_n\}$

- a_i sortiert nach absteigenden Quellws. $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$.

Algorithmus Huffman-Kodierung

Eingabe: Symbole a_i mit absteigend sortierten p_i, $i = 1, \ldots, n$.

1. IF (n=2), Ausgabe $C(a_1) = 0$, $C(a_2) = 1$.
2. ELSE
   1. Bestimme $k \in \mathbb{Z}_{n-1}$ mit $p_k \geq p_{n-1} + p_n \geq p_{k+1}$.
   2. $(p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_{n-1}) \leftarrow (p_1, \ldots, p_k, p_{n-1} + p_n, p_{k+1}, \ldots, p_{n-2})$
   3. $(C(a_1), \ldots, C(a_{k-1}), C(a_{k+1}), \ldots, C(a_{n-2}), C(a_k)0, C(a_k)1) \leftarrow$ Huffmann-Kodierung$(a_1, \ldots, a_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1})$

Ausgabe: kompakter Präfixcode für Q

Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$ ($\mathcal{O}(n \log n)$ mit Hilfe von Heap-Datenstruktur)

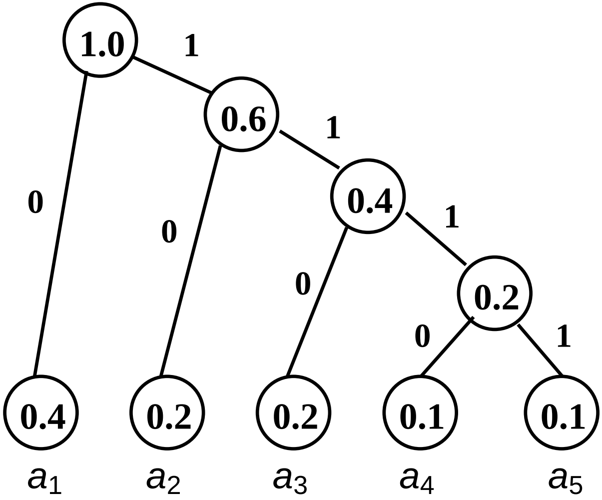
Beispiel Huffman-Kodierung

Beispiel: $p_1 = 0.4$, $p_2 = p_3 = 0.2$, $p_4 = p_5 = 0.1$

a_i	p_i	$C(a_i)$	p_i	$C(a_i)$	p_i	$C(a_i)$	p_i	$C(a_i)$
a_1	0.4	00	0.4	00	**0.4**	1	**0.6**	0
a_2	0.2	01	0.2	01	0.4	00	0.4	1
a_3	0.2	11	**0.2**	10	0.2	01		
a_4	0.1	100	0.2	11				
a_5	0.1	101						

- **Fett** gedruckt: Stelle k Man beachte: k ist nicht eindeutig, d.h. C ist nicht eindeutig.
- $E(C) = (0.4 + 0.2 + 0.2) * 2 + 2 * 0.1 * 3 = 2.2$
- Huffman-Tabelle: Spalten 1 und 3. Mittels Huffman-Tabelle kann jeder String $m \in A^*$ in Zeit $\mathcal{O}(|C(m)|)$ kodiert werden.

Wahl eines anderen k



$$E(C') = 0.4 * 1 + 0.2 * (2 + 3) + 0.1 * 2 * 4 = 2.2$$

Eigenschaften kompakter Codes

Sei $\ell_i := |C(a_i)|$.

Lemma: Eigenschaften kompakter Codes

Sei C ein kompakter Code, oBdA ist C ein Präfixcode.

1. Falls $p_i > p_j$, dann ist $\ell_i \leq \ell_j$
2. Es gibt mindestens zwei Codeworte in C mit maximaler Länge.
3. Unter den Worten mit maximaler Länge existieren zwei Worte, die sich nur in der letzten Stelle unterscheiden.

Beweis der Eigenschaften

Beweis:

1. Sei $\ell_i > \ell_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & p_i\ell_i + p_j\ell_j = p_i(\ell_i - \ell_j + \ell_j) + p_j(\ell_j - \ell_i + \ell_i) \\ = \; & p_i\ell_j + p_j\ell_i + (\ell_i - \ell_j)(p_i - p_j) > p_i\ell_j + p_j\ell_i \end{aligned}$$

   D.h. vertauschen der Kodierungen von a_i und a_j verkürzt den Code.

2. Sei $c = c_1 \ldots c_n \in C$ das einzige Codewort mit maximaler Länge. Streichen von c_n führt zu einem Präfixcode mit kürzerer erwarteter Codewortlänge.

3. Annahme: Alle Paar von Codeworten maximaler Länge unterscheiden sich nicht nur in der letzten Komponente.
   - Entferne die letzte Komponente eines beliebigen Codewortes maximaler Länge.
   - Wir erhalten einen Präfixcode mit kürzerer Länge.

Optimalität der Huffman-Kodierung

Satz

Die Huffman-Kodierung liefert einen kompakten Code.

Beweis per Induktion über *n*.

- **IA:** $n = 2$: Für $\{a_1, a_2\}$ ist die Codierung $\{0, 1\}$ kompakt.
- **IS:** $n - 1 \rightarrow n$: Sei C' kompakt für $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
  - Lemma,2: C' enthält zwei Codeworte maximaler Länge.
  - Lemma,3: Unter den Codeworten maximaler Länge gibt es zwei Codeworte $c0, c1 \in C'$ mit $c \in \{0, 1\}^*$, die sich nur in der letzten Stelle unterscheiden.
  - Lemma,1: Die beiden Symbole a_{n-1}, a_n mit kleinster Quellws besitzen maximale Codewortlänge. Vertausche die Kodierungen dieser Symbole mit $c0, c1$.
  - a_{n-1} oder a_n tauchen mit Ws $p_{n-1} + p_n$ auf.
  - **IA:** Huffman-Kodierung liefert kompakten Präfixcode C für $a_1, \ldots, a_{n-2}, a'$ mit Quellws $p_1, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1} + p_n$
  - $C(a_1), \ldots, C(a_{n-2}), C(a')0 = c0, C(a')1 = c1$ ist Präfixcode mit erwarteter Codewortlänge $E(C')$, d.h. die Huffman-Kodierung liefert einen kompakten Präfixcode.

Informationsgehalt einer Nachricht

Betrachten folgendes Spiel

- Gegeben: Quelle Q mit unbekannten Symbolen $\{a_1, a_2\}$ und $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.1$.
- Zwei Spieler erhalten rundenweise je ein Symbol.
- Gewinner ist, wer zuerst beide Symbole erhält.

Szenario:

- Spieler 1 erhält in der ersten Runde a_1 und Spieler 2 erhält a_2.
- **Frage:** Wer gewinnt mit höherer Ws? Offenbar Spieler 2.

Intuitiv: Je kleiner die Quellws, desto höher der Informationsgehalt.

Eigenschaft von Information

Forderungen für eine Informationsfunktion

1. $I(p) \geq 0$: Der Informationsgehalt soll positiv sein.
2. $I(p)$ ist stetig in p: Kleine Änderungen in der Ws p sollen nur kleine Änderungen von $I(p)$ bewirken.
3. $I(p_i) + I(p_j) = I(p_i p_j)$:
   - X = Ereignis, dass a_i und a_j nacheinander übertragen werden.
   - Informationsgehalt von X: $I(p_i) + I(p_j)$, $\mathrm{Ws}(X) = p_i p_j$

Satz zur Struktur von $I(p)$

Jede Funktion $I(p)$ für $0 < p \leq 1$, die obige drei Bedingungen erfüllt, ist von der Form

$$I(p) = C \log \frac{1}{p}$$

für eine positive Konstante C.

Beweis: Form von $I(p)$

- Forderung 3 liefert $I(p^2) = I(p) + I(p) = 2I(p)$.
- Induktiv folgt: $I(p^n) = nI(p)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 < p \leq 1$.
- Substitution $p \to p^{\frac{1}{n}}$ liefert: $I(p) = nI(p^{\frac{1}{n}})$ bzw. $I(p^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}I(p)$
- Damit gilt für alle $q \in \mathbb{Q}$: $I(p^q) = qI(p)$.
- Für jedes $r \in \mathbb{R}$ gibt es eine Sequenz q_i mit $\lim_{n\to\infty} q_n = r$. Aus der Stetigkeit von $I(p)$ folgt

$$I(p^r) = I(\lim_{n\to\infty} p^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} I(p^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} q_n I(p) = rI(p)$$

- Fixiere $0 < q < 1$. Für jedes $0 < p \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} I(p) &= I(q^{\log_q p}) = I(q)\log_q p = -I(q)\log_q(\frac{1}{p}) = -I(q)\frac{\log_2 \frac{1}{p}}{\log_2 q} \\ &= C\log_2 \frac{1}{p} \quad \text{mit } C = -I(q) \cdot \frac{1}{\log_2(q)} > 0. \end{aligned}$$

Definition Information $I(p)$

Definition $I(p)$

Die Information $I(p)$ eines Symbols mit Quellws $p > 0$ beträgt

$$I(p) = \log \frac{1}{p}.$$

Die Einheit der Information bezeichnet man als Bit.

Beispiele für Information

- $Q = \{0, 1\}$ mit $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Dann ist $I(\frac{1}{2}) = 1$, d.h. für jedes gesendete Symbol erhält der Empfänger 1 Bit an Information.
- $Q = \{0, 1\}$ mit $p_1 = 1, p_2 = 0$. Dann ist $I(1) = 0$, d.h. der Empfänger enthält 0 Bit an Information pro gesendetem Zeichen.
- Beamer-Bild SXGA: Auflösung $1280 * 1024$, 256 Farben
  - $2^{1280*1024*8}$ mögliche Folien. Annahme: Jede gleich wahrscheinlich.
  - Information in Bit: $I(2^{-1280*1024*8}) = 1280 * 1024 * 8 = 10.485.760$
- Meine Erklärung dieser Folie:
  ≤ 1000 Worte, ≤ 10.000 Worte Vokabular
  - Information meiner Erklärung: $I(10.000^{-1000}) < 13.288$
  - Beweis für "Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte!"

Entropie einer Quelle

Definition Entropie einer Quelle

Sei Q eine Quelle mit Quellws $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Wir bezeichnen mit

$$H(Q) = \sum_{i=1}^{n} p_i I(p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

die Entropie von Q.

- Für $p_i = 0$ definieren wir $p_i \log \frac{1}{p_i} = 0$.
- Entropie ist die durchschnittliche Information pro Quellsymbol.
- $P = \{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\} : H(Q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log n = \log n$
- $P = \{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0\} : H(Q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log n = \log n$
- $P = \{1, 0, 0, \ldots, 0\} : H(Q) = 1 * \log 1 = 0$

Wollen zeigen: $0 \leq H(Q) \leq \log n$.

Wechsel zu anderer Ws-Verteilung

Lemma Wechsel Ws-Verteilung

Seien $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ eine Ws-Verteilung und $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ mit $\sum_{i=1}^{n} q_i \leq 1$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} p_i I(p_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i I(q_i).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $p_i = q_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Nützliche Ungleichung für das Rechnen mit logs:

$$x - 1 \geq \ln x = \log x \cdot \ln 2 \qquad \text{für alle } x > 0$$

Gleichheit gilt gdw $x = 1$.

Beweis des Lemmas

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i I(p_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i I(q_i) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\log \frac{1}{p_i} - \log \frac{1}{q_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{p_i} \\
&\leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i - 1 \right) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Gleichheit gilt gdw $\frac{q_i}{p_i} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Untere und obere Schranken für $H(P)$

Satz Schranken für $H(P)$

Sei Q eine Quelle mit Ws-Verteilung $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Dann gilt

$$0 \leq H(Q) \leq \log n.$$

Weiterhin gilt $H(Q) = \log n$ gdw alle $p_i = \frac{1}{n}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $H(Q) = 1$ gdw $p_i = 1$ für ein $i \in [n]$.

- Sei $P' = \{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\}$ die Gleichverteilung.
- Nach Lemma zum Wechsel von Ws-Verteilungen gilt

$$H(Q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i'} = \log n \sum_{i=1}^{n} p_i = \log n.$$

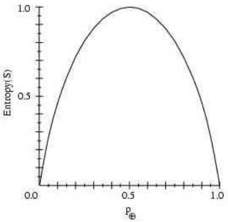
- Gleichheit gilt gdw $p_i = p_i' = \frac{1}{n}$ für alle i.

Untere Schranke für $H(P)$

Verwenden Ungleichung $\log x \geq 0$ für $x \geq 1$. Gleichheit gilt gdw $x = 1$.

$$H(Q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} \geq 0,$$

mit Gleichheit für $\frac{1}{p_i} = 1$ für ein $i \in [n]$. $\square$



- Binäre Quelle $Q = \{a_1, a_2\}$ mit $P = \{p, 1-p\}$

$$H(Q) = p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}.$$

- $H(Q)$ heißt binäre Entropiefunktion.

Kodieren einer binären Quelle

Szenario: Binäre Quelle Q mit $P = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ mit

$$H(Q) = \frac{1}{4} \cdot \log 4 + \frac{3}{4} \cdot \log \frac{4}{3} \approx 0.811.$$

- Huffman-Kodierung von Q:
  $C(a_1) = 0, C(a_2) = 1$ mit $E(C) = 1$
- **Problem:** Wie können wir a_2 mit kurzem Codewort kodieren?
- **Idee:** Kodieren Zweierblöcke von Quellsymbolen.

Quellerweiterungen von Q

- Betrachten $Q^2 = \{a_1a_1, a_1a_2, a_2a_1, a_2a_2\}$ mit Quellws
$$p_1 = \frac{1}{16}, p_2 = p_3 = \frac{3}{16}, p_4 = \frac{9}{16}.$$
- Huffmann-Kodierung von Q^2 liefert
$$C(a_1) = 000, C(a_2) = 001, C(a_3) = 01, C(a_4) = 1$$
mit $E(C) = 3 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{27}{16}$.
- Jedes Codewort kodiert zwei Quellsymbole, d.h. die durchschnittliche Codewortlänge pro Quellsymbol ist
$$E(C)/2 = \frac{27}{32} = 0.84375.$$
- *Übung:* Für Q^3 erhält man 0.82292.

k-te Quellerweiterung Q^k

Definition k-te Quellerweiterung

Sei Q eine Quelle mit Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und Ws-Verteilung $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Die k-te Quellerweiterung Q^k von Q ist definiert über dem Alphabet A^k, wobei $a = a_{i_1} \ldots a_{i_k} \in A^k$ die Quellws

$$p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \cdots \cdot p_{i_k}$$

besitzt.

Entropie von Q^k

Sei Q eine Quelle mit k-ter Quellerweiterung Q^k. Dann gilt

$$H(Q^k) = k \cdot H(Q).$$

Beweis für $H(Q^k)$

$$
\begin{aligned}
H(Q^k) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[n]^k} p_{i_1}\ldots p_{i_k} \log \frac{1}{p_{i_1}\ldots p_{i_k}} \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[n]^k} p_{i_1}\ldots p_{i_k} \log \frac{1}{p_{i_1}} + \cdots + \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[n]^k} p_{i_1}\ldots p_{i_k} \log \frac{1}{p_{i_k}}
\end{aligned}
$$

- Betrachten ersten Summanden

$$
\begin{aligned}
\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[n]^k} p_{i_1}\ldots p_{i_k} \log \frac{1}{p_{i_1}} &= \sum_{i_1} p_{i_1} \log \frac{1}{p_{i_1}} \cdot \sum_{i_2} p_{i_2} \cdot \cdots \cdot \sum_{i_k} p_{i_k} \\
&= \sum_{i_1} p_{i_1} \log \frac{1}{p_{i_1}} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = H(Q).
\end{aligned}
$$

- Analog liefern die anderen n-1 Summanden jeweils $H(Q)$.

Kodierungstheorem von Shannon

Kodierungstheorem von Shannon (1948)

Sei Q eine Quelle für $\{a_1, \ldots, a_n\}$ mit Ws-Verteilung $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Sei C ein kompakter Code für Q. Dann gilt für die erwartete Codewortlänge

$$H(Q) \le E(C) \le H(Q) + 1.$$

Beweis: $H(Q) \le E(C)$

- Bezeichnen Codewortlängen $\ell_i := |C(a_i)|$ und $q_i := 2^{-\ell_i}$.
- Satz von McMillan: $\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n 2^{-\ell_i} \le 1$.
- Lemma Wechsel Ws-Verteilung liefert

$$\begin{aligned} H(Q) &= \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{p_i} \le \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{q_i} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \log 2^{\ell_i} = \sum_{i=1}^n p_i \ell_i = E(C). \end{aligned}$$

$E(C) \leq H(Q) + 1$

- Seien $\ell_1, \ldots, \ell_n$ Codewortlängen mit $\sum_{i=1}^n 2^{-\ell_i} \leq 1 = \sum_{i=1}^n p_i$.
- Satz von McMillan garantiert Existenz von Code C' für

$$2^{-\ell_i} \leq p_i \quad \Leftrightarrow \quad -\ell_i \leq \log p_i \quad \Leftrightarrow \quad \ell_i \geq \log \frac{1}{p_i}.$$

- Wählen $\ell_i \in \mathbb{N}$ für alle i minimal mit obiger Eigenschaft, d.h.

$$\log \frac{1}{p_i} \leq \ell_i < \log \frac{1}{p_i} + 1.$$

  Ein Code C' mit dieser Eigenschaft heißt *Shannon-Fano Code*.
- Für jeden kompakten Code C gilt

$$\begin{aligned} E(C) \leq E(C') &= \sum_{i=1}^n p_i \ell_i < \sum_{i=1}^n p_i \left(\log \frac{1}{p_i} + 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^n p_i = H(Q) + 1 \end{aligned}$$

Anwendung auf Quellerweiterungen

Korollar zu Shannons Kodierungstheorem

Sei Q eine Quelle mit k-ter Quellerweiterung Q^k. Sei C ein kompakter Code für Q^k. Dann gilt

$$H(Q) \leq \frac{E(C)}{k} \leq H(Q) + \frac{1}{k}.$$

- Anwendung von Shannon's Kodierungstheorem auf Q^k liefert

$$H(Q^k) \leq E(C) \leq H(Q^k) + 1.$$

- Anwenden von $H(Q^k) = kH(Q)$ und teilen durch k liefert die Behauptung.

Bedingte Entropie

- Sei X, Y Zufallsvariablen
- Definieren $\mathrm{Ws}(x) = \mathrm{Ws}(X = x)$ und $\mathrm{Ws}(x, y) = Ws(X = x, Y = y)$.
- X, Y heißen unabhängig $\Leftrightarrow \mathrm{Ws}(x, y) = Ws(x) \cdot Ws(y)$

Definition Bedingte Entropie

Wir bezeichnen die Größe $H(Y|X)$

$$
\begin{aligned}
:= \quad & \sum_x \mathrm{Ws}(x) H(Y|X = x) = \sum_x \mathrm{Ws}(x) \left(\sum_y \mathrm{Ws}(y|x) \log \frac{1}{\mathrm{Ws}(y|x)} \right) \\
= \quad & \sum_x \sum_y \mathrm{Ws}(x, y) \log \frac{1}{\mathrm{Ws}(y|x)}
\end{aligned}
$$

als bedingte Entropie von Y gegeben X.

Eigenschaften bedingter Entropie

Rechenregel für die bedingte Entropie

1. Kettenregel:
   $H(X, Y) = \sum_x \sum_y \mathrm{Ws}(x, y) \log \frac{1}{\mathrm{Ws}(x,y)} = H(X) + H(Y|X)$ (Übung)
2. $H(Y|X) \leq H(Y)$. Gleichheit gilt gdw X, Y unabhängig sind. (ohne Beweis)
3. Folgerung aus 1. und 2.: $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$.

Kryptographische Kodierung

Szenario:

- Drei Klartexte: a, b, c mit Ws $p_1 = 0.5, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2$.
- Zwei Schlüssel k_1, k_2 gewählt mit Ws jeweils $\frac{1}{2}$
- Verschlüsselungsfunktionen:
  - e_{k_1}: $a \mapsto d$, $b \mapsto e$, $c \mapsto f$
  - e_{k_2}: $a \mapsto d$, $b \mapsto f$, $c \mapsto e$

- Seien P,C Zufallsvariablen für den Klar- und Chiffretext.
- Erhalten Chiffretext d, Plaintext muss a sein.
- Erhalten Chiffretext e, Plaintext muss b oder c sein.

$$\mathrm{Ws}(b|e) = \frac{\mathrm{Ws}(b,e)}{\mathrm{Ws}(e)} = \frac{\mathrm{Ws}(b,k_1)}{\mathrm{Ws}(b,k_1) + Ws(c,k_2)} = \frac{0.15}{0.15 + 0.1} = 0.6$$

  Lernen Information über zugrundeliegenden Klartext.
- $H(P) = \sum_i p_i \log \frac{1}{p_i} = 1.485$ und $H(P|C) = 0.485$.
- D.h. für gegebenen Chiffretext sinkt die Unsicherheit.

Perfekte Sicherheit

Definition

Perfekte Sicherheit Ein Kryptosystem ist perfekt sicher, falls $H(P|C) = H(P)$.

One-Time Pad

- Plaintextraum $\mathcal{P}$: $\{0,1\}^n$ mit Ws-Verteilung $p_1, \ldots, p_{2^n}$
- Schlüsselraum $\mathcal{K}$: $\{0,1\}^n$ mit Ws $\frac{1}{2^n}$ für alle Schlüssel
- Verschlüsselung: $c = e_k(x) = x \oplus k$ für $x \in \mathcal{P}, k \in \mathcal{K}$.

Sicherheit des One-Time Pads

Satz One-Time Pad

Das One-Time Pad ist perfekt sicher.

- Wahrscheinlichkeit von Chiffretext c:

$$\mathrm{Ws}(c) = \sum_{x,k:e_k(x)=c} \mathrm{Ws}(x)\mathrm{Ws}(k) = \frac{1}{2^n} \sum_{x,k:e_k(x)=c} \mathrm{Ws}(x) = \frac{1}{2^n}.$$

  Letzte Gleichung: Für jedes x, c existiert genau ein $k = x \oplus c$ mit $e_k(x) = c$.
- $H(K) = H(C) = n$
- Es gilt $H(P, K, C) = H(P, K) = H(P) + H(K)$
- Andererseits
  $H(P, K, C) = H(P, C) = H(P|C) + H(C) = H(P|C) + H(K)$.
- Dies liefert $H(P|C) = H(P)$.

Szenario für fehlerkorrigierende Codes

Definition (n, M)-Code

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ ein binärer Blockcode der Länge n mit $|C| = M$ Codeworten. Dann bezeichnen wir C als (n, M)-Code.

Erinnerung: Binärer symmetrischer Kanal

- Bits 0,1 kippen mit Ws $p, p < \frac{1}{2}$ zu 1,0.
- Korrekte Übertragung $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ mit Ws $1 - p$.
- Vorwärts-Kanalws: $\mathrm{Ws}(\mathbf{x} \text{ empfangen } | \mathbf{c} \text{ gesendet })$.
- Rückwärts-Kanalws: $\mathrm{Ws}(\mathbf{c} \text{ gesendet } | \mathbf{x} \text{ empfangen})$.
- Kanal ist erinnerungslos, d.h. die Ws sind unabhängig von vorigen Ereignissen.

Dekodieren

Dekodier-Kriterium

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ ein (n, M)-Code. Ein Dekodier-Kriterium f ist eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to C \cup \{\perp\}$. Sei $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$. Ein Dekodier-Kriterium dekodiert $\mathbf{x}$ zu $f(\mathbf{x}) \in C$ oder gibt Dekodierfehler $f(\mathbf{x}) = \perp$ aus.

- **Ziel:** Konstruktion eines Dekodier-Kriteriums, dass die Ws des korrekten Dekodierens maximiert.

$$\mathrm{Ws}(\text{korr. Dekodierung } | \mathbf{x} \text{ empfangen}) = \mathrm{Ws}(f(\mathbf{x}) \text{ gesendet } | \mathbf{x} \text{ empfangen})$$

- Summieren über alle möglichen empfangenen $\mathbf{x}$ liefert

$$\begin{aligned} & \mathrm{Ws}(\text{korrekte Dekodierung}) \\ = & \sum_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} \mathrm{Ws}(f(\mathbf{x}) \text{ gesendet } | \mathbf{x} \text{ empfangen}) \cdot \mathrm{Ws}(\mathbf{x} \text{ empfangen}) \end{aligned}$$

- Benötigen Maximierung der Rückwärts-Kanalws $\mathrm{Ws}(f(\mathbf{x}) \text{ gesendet } | \mathbf{x} \text{ empfangen})$, d.h. dekodieren zu demjenigen Codewort $\mathbf{c} = f(\mathbf{x})$, das mit höchster Ws gesendet wurde.

Maximum Likelihood Dekodierung

Definition Maximum Likelihood Dekodierung

Ein Dekodierkriterium $f(\mathbf{x})$, dass die Vorwärts-Ws für alle Codeworte maximiert, d.h.

$$\mathrm{Ws}(\mathbf{x} \text{ empfangen } | f(\mathbf{x}) \text{ gesendet}) = \max_{c \in C} \mathrm{Ws}(\mathbf{x} \text{ empfangen } | \mathbf{c} \text{ gesendet }),$$

heißt Maximum-Likelihood Kriterium. Eine Anwendung des Kriteriums bezeichnet man als Maximum-Likelihood Dekodierung.

Warum Maximum Likelihood?

Satz Maximum Likelihood optimal für gleichverteilte Codeworte

Sei C ein (n, M)-Code und $\mathrm{Ws}(\mathbf{c} \text{ empfangen}) = \frac{1}{M}$ für alle $\mathbf{c} \in C$. Dann minimiert die Maximum-Likelihood Dekodierung die Ws von Dekodierfehlern.

$$\mathrm{Ws}(\mathbf{c} \text{ gesendet } | \mathbf{x} \text{ empfangen })$$

$$= \frac{\mathrm{Ws}(\mathbf{x} \text{ empfangen } | \mathbf{c} \text{ gesendet})\mathrm{Ws}(\mathbf{c} \text{ gesendet})}{\sum_{i=1}^{M} \mathrm{Ws}(\mathbf{x} \text{ empfangen } | \mathbf{c_i} \text{ gesendet})\mathrm{Ws}(\mathbf{c_i} \text{ gesendet})}$$

$$= \frac{\mathrm{Ws}(\mathbf{x} \text{ empfangen } | \mathbf{c} \text{ gesendet})}{\sum_{i=1}^{M} \mathrm{Ws}(\mathbf{x} \text{ empfangen } | \mathbf{c_i} \text{ gesendet})}$$

- Nenner ist konstant für jeden Kanal.
- Maximierung des Zählers maximiert den Term.

Dekodieren zum Nachbarn minimaler Distanz

Definition Hamming-Distanz

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n$. Die Hamming-Distanz $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist die Anzahl der Stellen, an denen sich **x** und **y** unterscheiden.

Satz

In jedem binären symmetrischen Kanal ist das Dekodier-Kriterium, das ein **x** zum Codewort minimaler Hamming-Distanz dekodiert ein Maximum-Likelihood Kriterium.

- Ws von genau k Fehlern beim Senden von **c**

$$\mathrm{Ws}(\mathbf{x} \text{ empfangen} | \mathbf{c} \text{ gesendet}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- Wegen $p < \frac{1}{2}$ gilt $p < 1 - p$. Müssen Term maximieren.
- Wählen k minimal, d.h. Codewort **c** mit minimalem $d(\mathbf{x}, \mathbf{c})$.

Die Hamming-Distanz definiert eine Metrik.

Satz Metrik Hamming-Distanz

Die Hamming-Distanz ist eine Metrik auf $\{0,1\}^n$, d.h. für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \{0,1\}^n$ gilt:

1. Positivität: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, Gleichheit gdw $x = y$.
2. Symmetrie: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. Dreiecksungleichung: $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Beweis für 3:

Ann.: $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) > d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

- Verändern erst **x** zu **y**, dann **y** zu **z**.
- Müssen dazu $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) < d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ stellen ändern. Widerspruch: **x** und **z** unterscheiden sich an $d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ Stellen.

Fehlererkennung

Definition u-fehlererkennend

Sei C ein Code und $u \in \mathbb{N}$. C ist *u-fehlerkennend*, falls für alle Codeworte $c \in C$ gilt:
Zwischen 1 und u auftretende Fehler bei der Übertragung von c führen nicht zu einem anderen Codewort c'.
Ein Code ist *genau u-fehlererkennend*, falls er u-fehlererkennend ist, aber nicht $(u+1)$-fehlererkennend.

- Repetitionscode $R(3) = \{000, 111\}$ ist genau 2-fehlererkennend.
- $R(n) = \{0^n, 1^n\}$ ist genau $(n-1)$-fehlererkennend.
- $C = \{000000, 000111, 111111\}$ ist genau 2-fehlererkennend.

Fehlerkorrektur

Definition v-fehlerkorrigierend

Sei C ein Code und $v \in \mathbb{N}$. C ist *v-fehlerkorrigierend*, falls für alle $c \in C$ gilt:

- Treten zwischen 1 und v bei der Übertragung von c auf, so können diese mittels Dekodierung zum Codewort minimaler Hammingdistanz korrigiert werden.
- Existieren zwei verschiedene Codeworte mit minimaler Hammingdistanz, so wird eine Dekodierfehlermeldung $\perp$ ausgegeben.

Ein Code ist *genau v-fehlerkorrigierend*, falls er v-fehlerkorrigierend aber nicht $(v+1)$-fehlerkorrigierend ist.

- $R(3) = \{000, 111\}$ ist genau 1-fehlerkorrigierend.
- $R(4)$ ist genau 1-fehlerkorrigierend.
- $R(n)$ ist genau $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$-fehlerkorrigierend.
- $C = \{0^9, 0^4 1^5, 1^9\}$ ist genau 1-fehlerkorrigierend.

Minimaldistanz eines Codes

Definition Minimaldistanz

Sei C ein Code mit $|C| \geq 2$. Die *Minimaldistanz* $d(C)$ eines Codes ist definiert als

$$d(C) = \min_{\mathbf{c} \neq \mathbf{c}' \in C} \{d(\mathbf{c}, \mathbf{c}')\}$$

D.h. $d(C)$ ist die minimale Distanz zweier verschiedener Codeworte.

- $R(n)$ besitzt Minimaldistanz $d(R(n)) = n - 1$.
- $C = \{0001, 0010, 0101\}$ besitzt $d(C) = 1$.
- $C = \{0^9, 0^4 1^5, 1^9\}$ besitzt $d(C) = 4$.

Korollar Fehlererkennung

Ein Code C ist u-fehlererkennend gdw $d(C) \geq u + 1$.

Fehlerkorrektur vs Minimaldistanz

Satz Fehlerkorrektur vs Minimaldistanz

Ein Code C ist v-fehlerkorrigierend gdw $d(C) \geq 2v + 1$.

$\Leftarrow$:

- **Ann.:** C ist nicht v-fehlerkorrigierend.
- D.h. bei Übertragung von $\mathbf{c}$ entsteht $\mathbf{x}$ mit $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \leq v$ und $\exists \mathbf{c}' \neq \mathbf{c} : d(\mathbf{c}', \mathbf{x}) \leq v$
- Dreiecksungleichung: $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \leq d(\mathbf{c}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{c}') \leq 2v$ (Widerspruch: $d(C) \geq 2v + 1$)

Beweis der Hinrichtung "$\Rightarrow$"

Ann.: Es gibt $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}' \in C$ mit $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = d(C) \leq 2v$.

- 1.Fall: $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \leq v$. $\mathbf{c}$ kann durch Ändern von höchstens v Stellen in $\mathbf{x} = \mathbf{c}'$ überführt werden. $\mathbf{x}$ wird fälschlich zu $\mathbf{c}'$ dekodiert (Widerspruch: C ist v-fehlerkorrigierend)
- 2. Fall: $v + 1 \leq d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \leq 2v$.
- OBdA unterscheiden sich in $\mathbf{c}, \mathbf{c}'$ in ersten $d(C)$ Positionen. (Anderfalls sortiere die Koordinaten um.)
- Betrachten $\mathbf{x}$, das durch v Fehler in den ersten Koordinaten von $\mathbf{c}$ entsteht, so dass
  - $\mathbf{x}$ stimmt mit $\mathbf{c}'$ auf den ersten v Koordinaten überein.
  - $\mathbf{x}$ stimmt mit $\mathbf{c}$ auf den folgenden $d(C)$ Koordinaten überein.
  - $\mathbf{x}$ stimmt mit $\mathbf{c}, \mathbf{c}'$ auf den restlichen Koordinaten überein.
- Es gilt $d(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = v \geq d(C) - v = d(\mathbf{c}', \mathbf{x})$.
- D.h. entweder wird $\mathbf{x}$ fälschlich zu $\mathbf{c}'$ dekodiert, oder es entsteht ein Dekodierfehler. (Widerspruch: C ist v-fehlerkorrigierend)

(n, M, d)-Code

Definition (n, M, d)-Code

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ mit $|C| = M$ und Distanz $d(C) = d$. Dann bezeichnet man C als (n, M, d)-Code, wobei man (n, M, d) die *Parameter des Codes* nennt.

- $R(n)$ ist ein $(n, 2, n)$-Code.
- $C = \{000, 0011\}$ ist ein $(4, 2, 2)$-Code.
- $C = \{00, 01, 10, 11\}$ ist ein $(2, 4, 1)$-Code.

Korollar

Sei C ein (n, M, d)-Code.

1. C ist exakt v-fehlerkorrigiernd gdw $d = 2v + 1$ oder $d = 2v + 2$.
2. C ist exakt $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$-fehlerkorrigierend.

Maximale Codes

Definition Maximale Code

Ein (n, M, d)-Code ist maximal, falls er nicht in einem $(n, M+1, d)$-Code enthalten ist.

- $C = \{0000, 0011, 1111\}$ ist nicht maximal.
- $C' = \{0000, 0011, 1111, 1100\}$ ist maximal.

Erweiterung nicht-maximaler Codes

Satz Erweiterung von Codes

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ ein (n, M, d)-Code. C ist maximal gdw für alle $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ gilt: Es gibt ein $\mathbf{c} \in C$ mit $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) < d$.

"$\Rightarrow$"

- **Ann.:** Sei $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$, so dass für alle $\mathbf{c} \in C : d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \geq d$
- Dann ist $C \cup \{\mathbf{x}\}$ ein $(n, M+1, d)$-Code. (Widerspruch: C ist maximal.)

"$\Leftarrow$"

- **Ann.:** Sei C nicht maximal.
- D.h. $\exists \mathbf{x} \cup \{0,1\}^n : C \cup \{\mathbf{x}\}$ ist ein (n, M, d)-Code
- Dann gilt $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \geq d$ für alle $\mathbf{c} \in C$.

Ws für Dekodierfehler bei maximalen Codes

Satz Dekodierfehler bei maximalen Codes

Sei C ein maximaler (n, M, d)-Code für einen binären symmetrischen Kanal. Für die Fehlerws beim Dekodieren zum Codewort mit minimalem Hammingabstand gilt

$$\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq \mathrm{Ws}(\text{Dekodierfehler}) \leq 1 - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Korrekte Dekodierung bei $\leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ Fehlern, d.h. mit Ws mind.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- Inkorrekte Dekodierung bei $\geq d$ Fehlern, d.h. mit Ws mindestens

$$\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Beispiele für Codes

Repetitionscode: $R(n)$ ist $(n, 2, n)$-Code.

Hamming Code: $\mathcal{H}(h)$ ist ein $(2^h - 1, 2^{n-h}, 3)$-Code.

Golay Codes: $\mathcal{G}_{24}$ ist ein $(24, 2^{12}, 8)$-Code
Einsatz: Voyager für Bilder von Jupiter und Saturn.
$\mathcal{G}_{23}$ ist ein $(23, 2^{12}, 7)$-Code.

Reed-Muller Code: $RM(r, m)$ ist ein $(2^m, 2^{1+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{r}}, 2^{m-r})$-Code.
$R(1, m) = (2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$.
Einsatz: Mariner 9 für Bilder vom Mars.

Hammingkugel

Definition Hammingkugel

Sei $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ und $r \geq 0$. Wir definieren die n-dimensionale Hammingkugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ und Radius r als

$$B^n(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \{0,1\}^n | d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}.$$

Beispiel: $B^3(001, 1) = \{001, 101, 011, 110\}$.

Satz Volumen von $B^n(\mathbf{x}, r)$

Das Volumen der Hammingkugel $B^n(\mathbf{x}, r)$ ist $V^n(r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}$.

- Es gibt $\binom{n}{i}$ String mit Distanz i von x.

Packradius eines Codes

Packradius eines Codes

Sei C ein (n, M, d)-Code. Der Packradius $pr(C) \in \mathbb{N}$ von C ist die größte Zahl, so dass die Hammingkugeln $B^n(\mathbf{c}, pr(C))$ für alle $\mathbf{c} \in C$ disjunkt sind.

Korollar

Sei C ein (n, M, d)-Code.

1. Der Packradius von C ist $pr(C) = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$.
2. C ist genau v-fehlerkorrigierend gdw $pr(C) = v$.

Perfekte Codes

Definition Perfekter Code

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ ein (n, M, d)-Code. C heißt *perfekt*, falls

$$M \cdot V^n\left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor\right) = 2^n.$$

D.h. die maximalen disjunkten Hammingkugeln um die Codeworte partitionieren $\{0,1\}^n$.

- Nicht für alle (n, M, d), die obige Bedingung erfüllen, gibt es auch einen Code.

Perfekte Codes

- $\{0,1\}^n$ ist ein $(n, 2^n, 1)$-Code
  - Packradius ist 0, Hammingkugeln bestehen nur aus Codewort selbst
  - Perfekter Code, aber nutzlos für Fehlerkorrektur.
- $R(n)$ ist ein $(n, 2, n)$ ist für ungerade n perfekt
  - $2 \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i} = 2 \cdot \frac{2^n}{2} = 2^n$
  - Code ist nutzlos, da er nur zwei Codeworte enthält.
- Der Golay Code $(23, 2^{12}, 7)$ ist perfekt.
  - $2^{12} \cdot \sum_{i=0}^{3} \binom{23}{i} = 2^{11} \cdot 2^{12} = 2^{23}$
- Der Hamming Code $\mathcal{H}(h) = (n, M, d) = (2^h - 1, 2^{n-h}, 3)$ ist perfekt.
  - $2^{n-h}\left(1 + 2^h - 1\right) = 2^n$
- Die einzigen perfekten, binären v-fehlerkorrigierenden Codes mit $v \geq 2$ sind Repetitionscodes und der obige Golay Code.

Die Rate eines Codes

Definition Rate eines Codes

Sei C ein (n, M, d)-Code.

1. Die *Übertragungsrate* ist definiert als $\mathcal{R}(C) = \frac{\log_2(M)}{n}$
2. Die *Fehlerrate* ist definiert als $\delta(C) = \frac{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}{n}$.

Beispiele:

- $C = \{0^n\}$ hat Übertragungrate 0, aber perfekte Fehlerkorrektur.
- $C = \{0, 1\}^n$ hat Übertragungrate 1, aber keine Fehlerkorrektur.
- $\mathcal{R}(R(n)) = \frac{1}{n}$. Für $n = 2v + 1 : \delta(R(N)) = \frac{v}{2v+1}$.
    - Übertragungsrate konvergiert gegen 0, Fehlerrate gegen $\frac{1}{2}$.
- $H(h) = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n}$ und $\delta(H(h)) = \frac{1}{n}$.
    - Übertragungsrate konvergiert gegen 1, Fehlerrate gegen 0.

Die Größe $A(n,d)$ und optimale Codes

Definition Optimaler Code

Wir definieren

$$A(n,d) = \max\{M \mid \exists \text{ binärer } (n,M,d) - \text{Code}\}$$

Ein (n,M,d)-Code heißt optimal, falls $M = A(n,d)$.

- Bestimmung von $A(n,d)$ ist offenes Problem.
- Zeigen hier obere und untere Schranken für $A(n,d)$.
- Für kleine Werte von n,d bestimmen wir $A(n,d)$ wie folgt:
  - Zeigen $A(n,d) \leq M$
  - Konstruieren (n,M,d)-Code.

- $A(n,d) \leq 2^n$ für $d \in [n]$: höchstens 2^n Codeworte der Länge n.
- $A(n,1) = 2^n$: $C = \{0,1\}^n$.
- $A(n,n) = 2$: $R(n)$.
- $A(n,d) \leq A(n,d')$ für $d,d' \in [n]$ mit $d' \leq d$ (Übung)

0^n ist ein Codewort

Lemma Äquivalenter Code mit 0^n

Sei C ein (n, M, d)-Code. Dann gibt es einen (n, M, d)-Code C' mit $0^n \in C'$.

- Sei $c \in C$ mit k Nullen und $n - k$ Einsen.
- Permutiere Positionen in c so, dass c mit den k Nullen beginnt.
- Wende dieselbe Permutation auf die anderen Codeworte in C an.
  - Beachte: Die Distanz ändert sich nicht durch eine Permutation der Stellen.
- Flippe in jedem Codewort die letzten $n - k$ Stellen.
  - Beachte: Die Distanz ändert sich nicht durch ein Flippen der Bits.
- Der resultierende Code C' enthält 0^n und ist ein (n, M, d)-Code.

Bsp: $C = \{0101, 1010\}$ wird zu $C' = \{0000, 1111\}$.

Erstes nicht-triviales Resultat

Satz

$A(4,3) = 2$.

- Sei C ein optimaler $(4, M, 3)$-Code. OBdA $0000 \in C$.
- Worte mit Distanz mindestens 3 von 0000:

$$0111, 1011, 1101, 1110, 1111.$$

- Je zwei Worte besitzen Distanz höchstens 2, d.h. $A(4,3) \leq 2$.
- Für $C = \{0000, 0111\}$ gilt $d(C) = 3$ und damit $A(4,3) = 2$.

Verkürzen eines Codes

Definition Verkürzter Code

Sei C ein (n, M, d)-Code und $j \in [n]$, $b \in \{0, 1\}$. Der *bezüglich b-Bit an j-ter Position verkürzte Code* C'

1. besteht aus denjenigen Codeworten aus C, deren j-tes Bit b ist,
2. besitzt Länge $n - 1$ durch Herausstreichen der j-ten Stelle.

- **Bsp:** Kürzen von $C = \{001, 010, 101\}$ bezüglich 0-Bit an 1. Position liefert $C' = \{01, 10\}$.
- Beachte C besitzt Distanz 1, aber $d(C') = 2$.

Satz Verkürzter Code

Sei C ein (n, M, d)-Code und C' ein verkürzter Code. Dann gilt $d(C') \geq d$.

- Betrachten nur die bezüglich einer Stelle j konstanten Codeworte.
- Stelle j kann nicht zur Distanz beitragen.

Rekursive Schranke für $A(n,d)$

Lemma Rekursive Schranke

Für $n \geq 2$ gilt: $A(n,d) \leq 2 \cdot A(n-1,d)$.

- Sei C ein optimaler (n,M,d)-Code.
- Sei C_b der bezügl. b-Bit, $b \in \{0,1\}$ an 1. Position verkürzte Code.
- Aus $d(C_b) \geq d$ folgt

$$\begin{aligned} A(n,d) = M = |C_0| + |C_1| &\leq A(n-1, d(C_0)) + A(n-1, d(C_1)) \\ &\leq A(n-1,d) + A(n-1,d). \end{aligned}$$

Korollar

$A(5,3) = 4$.

- $A(5,3) \leq 2 \cdot A(4,3) = 4$.
- $C = \{00000, 11100, 00111, 11011\}$ besitzt $d(C) = 3$.

Schnitt von Strings

Definition Gewicht, Schnitt

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subseteq \{0,1\}^n$. Das Gewicht von $\mathbf{x}$ ist definiert als die Anzahl von Einsen in $\mathbf{x}$.
Seien $\mathbf{x} = x_1 \ldots y_n$, $\mathbf{y} = y_1 \ldots y_n$. Dann ist der Schnitt definiert als

$$\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = x_1 \cdot y_1 \ldots x_n \cdot y_n$$

Lemma Distanz via Gewicht

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subseteq \{0,1\}^n$. Dann gilt

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y}) - 2w(\mathbf{x} \cap \mathbf{y})$$

- Sei $a_{b_0 b_1}$: Anzahl Position mit b_0 in $\mathbf{x}$ und b_1 in $\mathbf{y}$, $b_i \in \{0,1\}$.
- Es gilt

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{10} + a_{01} &= (a_{10} + a_{11}) + (a_{01} + a_{11}) - 2a_{11} \\ &= w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y}) - 2w(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Ungerade d genügen

Satz

Sei $d \geq 1$ ungerade. Dann existiert ein (n, M, d)-Code C gdw ein $(n+1, M, d+1)$-Code C' existiert.

"$\Leftarrow$": Sei C' ein $(n+1, M, d+1)$ Code.

- Seien $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in C'$ mit $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = d + 1$ und i eine Position mit $\mathbf{c_i} \neq \mathbf{c_i'}$.
- Lösche i-te Position aus C'. Resultierender Code C besitzt $d(C) = d$ und Länge n.

"$\Rightarrow$": Sei C ein (n, M, d) Code.

- C: Erweitere C um Paritätsbit, so dass $w(\mathbf{c})$ gerade für alle $\mathbf{c} \in C'$.
- Mittels Lemma

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y}) - 2w(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = 0 \mod 2 \text{ für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C'.$$

- Wegen $d = d(C)$ ungerade und $d \leq d(C') \leq d + 1$ folgt $d(C') = d + 1$.

Einige Werte von $A(n, d)$ (Quelle: Sloane 1982)

Korollar

$A(n, d) = A(n + 1, d + 1)$ für $d \geq 1$ ungerade.

n	5	6	7	8	9	10	11	16
$d = 3$	4	8	16	20	40	72-79	144-158	2560-3276
$d = 5$	2	2	2	4	6	12	24	256-340
$d = 7$	-	-	2	2	2	2	4	36-37

Sphere-Covering und Sphere-Packing

Satz Schranken Sphere-Covering und Sphere-Packing

$$\frac{2^n}{V^n(d-1)} \leq A(n,d) \leq \frac{2^n}{V\left(\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor\right)}.$$

Untere Schranke Sphere-Covering:

- Sei C ein optimaler (n, M, d)-Code, d.h. $M = A(n,d)$.
- Für alle $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n \, \exists \, \mathbf{c} \in C$: $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) < d$ (Warum?)

$$\{0,1\}^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B^n(c_i, d-1) \quad \Rightarrow \quad 2^n \leq V^n(d-1) \cdot M.$$

Obere Schranke Sphere-Packing:

- C korrigiert $\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor$ Fehler, d.h. Hammingkugeln mit diesem Radius sind disjunkt

$$\bigcup_{i=1}^{M} B^n\left(c_i, \left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor\right) \subseteq \{0,1\}^n \quad \Rightarrow \quad V^n\left(\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor\right) \cdot M \leq 2^n$$

Bsp $A(n,3)$ für Sphere-Covering und Sphere-Packing

n	5	6	7	8	9	10	11	16
untere	2	3	5	7	12	19	31	479
$A(n,3)$	4	8	16	20	40	72-79	144-158	2560-3276
obere	5	9	16	28	51	93	170	3855

Singleton-Schranke

Satz Singleton-Schranke

$$A(n,d) \leq 2^{n-d+1}$$

- Sei C ein optimaler (n, M, d)-Code. Entferne letzte $d-1$ Stellen.
- Resultierende Codeworte sind alle verschieden, da sich $\mathbf{c} \in C$ in mindestens d Stellen unterscheiden.
- Es gibt M viele verkürzte unterschiedliche Codeworte der Länge $n-(d-1)$:
$$M \leq 2^{n-d+1}.$$

Vereinfachte Plotkin-Schranke

Satz Vereinfachte Plotkin-Schranke

Sei $n < 2d$, dann gilt

$$A(n,d) \leq \frac{2d}{2d-n}.$$

- Sei C ein optimaler $(n,M,d)-Code$ und $S = \sum_{i<j} d(\mathbf{c_i},\mathbf{c_j})$.
- Je zwei Codeworte besitzen Distanz mindestens d, d.h. $S \geq d\binom{M}{2}$.
- Betrachten erste Stelle in allen Codeworten:
  - Sei k die Anzahl der Nullen und $(M-k)$ die Anzahl der Einsen.
  - Erste Stelle liefert Beitrag von $k(M-k)$ zu S.
  - $k(M-k)$ ist maximal für $k = \frac{M}{2}$, d.h. $k(M-k) \leq \frac{M^2}{4}$.
  - Analog für jede der n Stellen, d.h. $S \leq \frac{nM^2}{4}$.
- Kombination beider Schranken und Auflösen nach M liefert

$$M \leq \frac{2d}{2d-n}.$$

Vergleich der oberen Schranken

n	7	8	9	10	11	12	13
$A(n,7)$	2	2	2	2	4	4	8
Singleton	2	4	8	16	32	64	128
Plotkin	2	2	2	3	4	7	14

Kodierungstheorem von Shannon für fehlerbehaftete Kanäle

Gegeben ein binärer symmetrischer Kanal mit Fehlerws p. Für alle $R < 1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)$ und alle $\epsilon > 0$ gibt es für hinreichend große n einen (n, M)-Code C mit Übertragungsrate $\mathcal{R}(C) \geq R$ und

$$\mathrm{Ws}(\mathrm{Dekodierfehler}) \leq \epsilon.$$

- Beweis komplex, nicht-konstruktiv.
- Resultat gilt nur asymptotisch für genügend große Blocklänge.

Erinnerung: Der Vektorraum $\mathbb{F}_2^n$

Schreiben $\{0,1\}^n$ als $\mathbb{F}_2^n$.

Definition Vektorraum $\mathbb{F}_2^n$

$(\mathbb{F}_2^n, +, \cdot)$ mit Addition modulo 2, $+ : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ und skalarer Multiplikation $\cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ definiert einen Vektorraum, d.h.

1. Assoziativität: $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
2. Kommutativität: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
3. $\exists$ neutrales Element $\mathbf{0^n} : \mathbf{0^n} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0^n} = \mathbf{x}$
4. Selbstinverse: $\forall \mathbf{x} : \mathbf{x} = -\mathbf{x}$, d.h. $x + x = \mathbf{0^n}$.
5. Skalare Multiplikation: $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.

Definition Unterraum des $\mathbb{F}_2^n$

$S \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ist ein Unterraum des $\mathbb{F}_2^n$ gdw

$$\mathbf{0^n} \in S \text{ und } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S : \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S.$$

Erzeugendensystem und Basis

Definition Erzeugendensystem und Basis eines Unterraums

Sei $S \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Unterraum. Eine Menge $G = \{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\} \subseteq S$ heißt *Erzeugendensystem* von S, falls jedes $\mathbf{x} \in S$ als Linearkombination

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{g_1} + \ldots \alpha_k \mathbf{g_k} \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathbb{F}_2$$

geschrieben werden kann. Notation: $S = \langle \mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k} \rangle$.
Eine *Basis* B ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. keine Teilmenge von B erzeugt S.

- $C = \{000, 100, 010, 110\}$ wird von $G = \{000, 100, 010\}$ erzeugt.
- $B = \{100, 010\}$ ist eine Basis von C.
- $B' = \{100, 110\}$ ist ebenfalls eine Basis.

Basisergänzung

Erinnerung Eigenschaften einer Basis

Sei $S \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Unterraum.

1. Jede Basis von S hat dieselbe Kardinalität, genannt die Dimension $dim(S)$.
2. Jedes Erzeugendensystem G von S enthält eine Untermenge, die eine Basis von S ist.
3. Jede linear unabhängige Teilmenge von S kann zu einer Basis ergänzt werden.

Lineare Codes

Definition Linearer Code

Sei $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Code. Falls C ein Unterraum ist, bezeichnen wir C als *linearen Code*. Sei k die Dimension und d die Distanz von C, dann bezeichnen wir C als $[n, k, d]$-Code.

- $C = \{000, 100, 010, 110\}$ ist ein $[3, 2, 1]$-Code.
- $C = \langle 1011, 1110, 0101 \rangle$ ist ein $[4, 2, 2]$-Code.
- Jeder $[n, k, d]$-Code ist ein $(n, 2^k, d)$-Code.
- D.h. wir können $M = 2^k$ Codeworte mittels einer Basis der Dimension k kompakt darstellen.
- Beispiele für lineare Codes:
  Hamming Codes, Golay Codes und Reed-Muller Codes.

Generatormatrix eines linearen Codes

Definition Generatormatrix

Sei C ein linearer $[n, k, d]$-Code mit Basis $B = \{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_k}\}$. Die $(k \times n)$-Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b_k} \end{pmatrix}$$

heißt Generatormatrix des Codes C.

Distanz von linearen Codes

Satz Distanz eines linearen Codes

Sei C ein linearer Code. Dann gilt

$$d(C) = \min_{\mathbf{c} \in C, \mathbf{c} \neq 0} \{w(\mathbf{c})\}.$$

"$\leq$":

- Sei $\mathbf{c_m} = \min_{\mathbf{c} \in C, \mathbf{c} \neq 0} \{w(\mathbf{c})\}$. Dann gilt

$$d(C) \leq d(\mathbf{c_m}, \mathbf{0^n}) = w(\mathbf{c_m})$$

"$\geq$":

- Seien $\mathbf{c_i}, \mathbf{c_j}$ Codeworte mit $d(C) = d(\mathbf{c_i}, \mathbf{c_j})$.
- Linearität von C: $\mathbf{c_i} + \mathbf{c_j} = \mathbf{c}' \in C$. Daher gilt

$$d(C) = d(\mathbf{c_i}, \mathbf{c_j}) = w(\mathbf{c_i} + \mathbf{c_j}) = w(\mathbf{c}') \geq \min_{\mathbf{c} \in C, \mathbf{c} \neq 0} \{w(\mathbf{c})\}.$$

Bsp: $G = \langle 110, 111 \rangle$ besitzt $d(G) = w(001) = 1$.

Dekodierung mittels Standardarray

Algorithmus Standardarray

Eingabe: $C = \{\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_M}\}$ linearer $[n, \log_2 M, d]$-Code mit $\mathbf{c_1} = \mathbf{0^n}$.

1. $S \leftarrow C$. Schreibe C in erste Zeile einer Tabelle.
2. While $S \neq \mathbb{F}_2^n$
   1. Wähle Fehlervektor $\mathbf{f} \in \mathbb{F}_2^n \setminus S$ mit minimalem Gewicht.
   2. Schreibe $\mathbf{c_1} + \mathbf{f}, \ldots, \mathbf{c_m} + \mathbf{f}$ in neue Tabellenzeile.
   3. $S \leftarrow S \cup \{\mathbf{c_1} + \mathbf{f}, \ldots, \mathbf{c_m} + \mathbf{f}\}$.

Beispiel: $C = \{0000, 1011, 0110, 1101\}$ besitzt Standardarray:

0000	**1011**	**0110**	**1101**
1000	0011	1110	0101
0100	1111	0010	1001
0001	1010	0111	1100

- Dekodieren $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ zum Codewort in derselben Spalte.

Korrektheit des Algorithmus

Satz Dekodierung zum nächsten Nachbarn via Standardarray

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code mit Standardarray A. Jeder String $\mathbf{x}$ wird durch Algorithmus *Standardarray* zum nächsten Nachbarn dekodiert.

- Sei $\mathbf{x} = \mathbf{f_i} + \mathbf{c_j}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c} \in C}\{d(\mathbf{x}, \mathbf{c})\} &= \min_{\mathbf{c} \in C}\{w(\mathbf{x} - \mathbf{c})\} = \min_{\mathbf{c} \in C}\{w(\mathbf{f_i} + \mathbf{c_j} - \mathbf{c})\} \\ &= \min_{\mathbf{c} \in C}\{w(\mathbf{f_i} + \mathbf{c})\} \quad // \mathbf{c_j} - \mathbf{c} \text{ durchläuft alle Codeworte} \\ &\stackrel{2.1}{=} w(\mathbf{f_i}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{c_j}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{c_j}). \end{aligned}$$

Satz Dekodierfehler perfekter linearer Codes

Sei C ein perfekter $[n, k, d]$-Code. Für einen binären symmetrischen Kanal mit Fehlerws p gilt bei Verwendung von Alg. *Standardarray*

$$\text{Ws(korrekte Dekodierung)} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{(Beweis: Übung)}$$

Inneres Produkt und Orthogonalität

Fakt Eigenschaften des inneren Produkts

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{F}_2^n$ und $\alpha \in \mathbb{F}_2$. Dann gilt für das innere Produkt $\cdot : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ mit $(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) \mapsto x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

1. Kommutativität: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
2. Distributivität: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$
3. Skalare Assoziativität: $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

Definition Orthogonalität, orthogonales Komplement

Sei $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{F}_2^n$. Wir bezeichnen $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ als orthogonal, falls $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0$. Das *orthogonale Komplement* $\{\mathbf{y}\}^\perp$ von $\mathbf{y}$ ist definiert als die Menge

$$\{\mathbf{y}\}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\}.$$

Lineare Codes mittels orthogonalem Komplement

Satz Linearer Code $\{\mathbf{y}\}^\perp$

Sei $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$. Dann ist $\{\mathbf{y}\}^\perp$ ein linearer Code.

- Zeigen, dass $\{\mathbf{y}\}^\perp$ ein Unterraum des $\mathbb{F}_2^n$ ist.
- Abgeschlossenheit: Seien $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ im orthog. Komplement von $\mathbf{y}$.

$$(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y} = 0$$

- $\mathbf{0} \in \{\mathbf{y}\}^\perp$, denn $\mathbf{0} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Bsp:

- $\{\mathbf{1}\}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid w(\mathbf{x}) \text{ gerade}\}$
- Wir nennen $x_1 + \ldots + x_n = 0$ die Parity Check Gleichung des Codes $\{\mathbf{1}\}^\perp$.

Orthogonales Komplement erweitert auf Mengen

Definition Orthogonales Komplement einer Menge

Sei $C = \{\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_M}\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$. Das *orthogonale Komplement* von C ist definiert als

$$C^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid c_i \cdot x = 0 \text{ für alle } i\}.$$

- Sei $\mathbf{c_i} = c_{i1}c_{i2}\ldots c_{in}$. Für $\mathbf{x} \in C^\perp$ gelten Parity Check Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ c_{M1}x_1 + c_{M2}x_2 + \ldots + c_{Mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

- Sei $P = (c_{ij})_{1\leq i\leq M, 1\leq j\leq n}$, dann gilt $P\mathbf{x}^t = \mathbf{0}^t$ bzw.

$$\mathbf{x}P^t = \mathbf{0}.$$

- Wir bezeichnen P als Parity Check Matrix von $C^\perp$.

Dualer Code

Satz Dualer Code

Sei $C = \{\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_M}\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Code. Das orthogonale Komplement $C^\perp$ von C ist ein linearer Code, genannt der duale Code von C.

- Abgeschlossenheit: Seien $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in C^\perp$ und $P = (c_{ij})_{1 \le i \le M, 1 \le j \le n}$. Dann gilt
$$(\mathbf{x} + \mathbf{x}')P^t = \mathbf{x}P^t + \mathbf{x}'P^t = \mathbf{0}.$$
- $0^n \in C^\perp$, denn $0^n P^t = 0^M$.

Bsp

- Sei $C^\perp = \{100, 111\}^\perp$. Dann gelten die Parity Check Gleichungen
$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad\quad &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$
- Aus der 2. Gleichung folgt $x_2 = x_3$ in $\mathbb{F}_2$, d.h. $C^\perp = \{000, 011\}$.

Parity Check Matrix

Definition Parity Check Matrix P

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code. Jede Matrix P mit der Eigenschaft

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{x}P^t = \mathbf{0}\}$$

heißt *Parity Check Matrix des Codes C*.

- D.h. C wird sowohl durch eine Generatormatrix als auch durch eine Parity Check Matrix eindeutig definiert.
- Im Gegensatz zu Generatormatrizen setzen wir nicht voraus, dass die Zeilen von P linear unabhängig sind.
- **Bsp.**: Code $C = \{011, 101\}^{\perp}$ besitzt die Parity Check Matrizen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften dualer Codes

Satz Eigenschaften dualer Codes

Seien C, D Codes mit $C \subseteq D$. Dann gilt $D^\perp \subseteq C^\perp$.

- Sei $\mathbf{x} \in D^\perp$. Dann gilt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{d} = 0$ für alle $\mathbf{d} \in D$.
- Somit ist $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 0$ für alle $c \in C \subseteq D$, d.h. $\mathbf{x} \in C^\perp$.

Satz Eigenschaften dualer Code von linearen Codes

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code mit Generatormatrix G. Dann gilt

1. $C^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{x}G^t = \mathbf{0}\}$, d.h. G ist Parity Check Matrix für $C^\perp$.
2. $\dim(C^\perp) = n - \dim(C)$.
3. $C^{\perp\perp} = C$.

Beweis der Eigenschaften 1+2

1. G besitze Zeilenvektoren $\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}$. Zeigen $C^\perp = \{\mathbf{g_1} \ \ldots, \mathbf{g_k}\}^\perp$.
   - Mit vorigem Satz folgt: $\{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\} \subseteq C \Rightarrow C^\perp \subseteq \{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\}^\perp$.
   - $\{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\}^\perp \subseteq C^\perp$: Sei $\mathbf{x} \in \{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\}^\perp$. Dann ist $\mathbf{x}$ orthogonal zu jeder Linearkombination der $\mathbf{g_i}$, d.h. $\mathbf{x}$ ist orthog. zu jedem $\mathbf{c} \in C$.
2. Mit 1. gelten die Parity Check Gleichungen

$$\begin{aligned} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \ldots g_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ g_{k1}x_1 + g_{k2}x_2 + \ldots g_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

   Umwandeln in linke Standardform liefert (eventuell nach Spaltenumbenennung)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & +a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & x_k & +a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k,n}x_n & = & 0 \end{array}$$

   Variablen $x_{k+1}, \ldots, x_n$ frei wählbar. Daher gilt $\dim(C^\perp) = n - k$.
3. Zeigen $C \subseteq C^{\perp\perp}$ und $\dim(C) = \dim(C^{\perp\perp})$. Damit gilt $C = C^{\perp\perp}$.

Beweis $C = C^{\perp\perp}$

- Zeigen zunächst $C \subseteq C^{\perp\perp}$. Sei $\mathbf{c} \in C$.
- Es gilt $C^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{c_i} = \mathbf{0} \text{ für alle } \mathbf{c_i} \in C\}$.
- Ferner $C^{\perp\perp} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ für alle } \mathbf{x} \in C\}$, d.h. $\mathbf{c} \in C^{\perp\perp}$.
- Wegen 2. gilt:
  $\dim(C^{\perp\perp}) = n - \dim(C^{\perp}) = n - (n - \dim(C)) = \dim(C)$.

Korollar Existenz einer Parity Check Matrix

Sei C ein linearer Code. Jede Generatormatrix von $C^{\perp}$ ist eine Parity Check Matrix für C. D.h. insbesondere, dass jeder lineare Code C eine Parity Check Matrix besitzt.

- $C^{\perp}$ ist linear, besitzt also eine Generatormatrix G.
- G ist Parity Check Matrix für den Dualcode von $C^{\perp}$, d.h. für $C^{\perp\perp} = C$.

Konstruktion eines dualen Codes

Bsp: $C = \langle 1011, 0110 \rangle$.

- Parity Check Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 0 \end{array}$$

- Wählen beliebige Werte für x_3, x_4 und lösen nach x_1, x_2 auf.
- $C^\perp = \{0000, 1001, 1110, 0111\} = \langle 1001, 1110 \rangle$
- $\dim(C^\perp) = 4 - \dim(C) = 2$

Bsp: $C = \langle 1100, 0011 \rangle$

- Codeworte 1100 und 0011 sind orthogonal.
- Beide Codeworte 1100, 0011 sind orthogonal zu sich selbst.
- D.h. $C \subseteq C^\perp$ und $\dim(C) = 2 = \dim(C^\perp)$.
- Damit ist $C^\perp = C$. C ist ein *selbst-dualer Code*.

Präsentation eines Codes durch G oder P

Vorteil der Präsentation durch Generatormatrix:

- Einfache Generierung aller Codeworte von C

Vorteil der Präsentation durch Parity Check Matrix:

- Entscheidung, ob ein $\mathbf{x}$ im Code C liegt.

Satz Minimaldistanz via P

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code mit Parity Check Matrix P. Für die Minimaldistanz von C gilt

$$d(C) = \min\{r \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt } r \text{ linear abhängige Spalten in } P\}.$$

Beweis zur Minimaldistanz via Spalten von P

- Sei r die minimale Anzahl von linear abhängigen Spalten.
- Es gibt ein $\mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n$ mit $w(\mathbf{c}) = r$ und $P \cdot \mathbf{c}^t = \mathbf{0}^t \Leftrightarrow \mathbf{c}P^t = \mathbf{0}$.
- Damit gilt $\mathbf{c} \in C$ und $d(C) \leq r$.

- Annahme: $d(C) < r$.
- Sei $\mathbf{c}' \in C$ ein Codewort mit Gewicht $d(C)$. Dann gilt $P \cdot (\mathbf{c}')^t = \mathbf{0}^t$.
- D.h. es gibt $d(C) < r$ linear abhängige Spalten in P.
  (Widerspruch zur Minimalität von r)

Gilbert-Varshamov Schranke

- Erinnerung Sphere-Covering Schranke: $A(n,d) \geq \frac{2^n}{V^n(d-1)}$.
- Idee: Überdecke Raum $\mathbb{F}_2^n$ mit Hammingkugeln vom Radius $d-1$.

Gilbert Varshamov Schranke

Es gibt einen linearen $[n,k,d]$-Code falls

$$2^k < \frac{2^n}{V^{n-1}(d-2)}.$$

Sei k maximal. Es folgt $A(n,d) \geq 2^k$.

Bsp: $A(5,3)$

- Sphere-Covering: $A(5,3) \geq \frac{2^5}{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}} = 2$
- Gilbert-Varshamov: Es gibt einen linearen $(5, 2^k, 3)$-Code falls
$$2^k < \frac{2^5}{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}} = \frac{32}{5}.$$
- $k=2$ ist maximal, d.h. es gibt einen linearen $(5,4,3)$-Code.
- Es folgt $A(5,3) \geq 4$. Wissen bereits, dass $A(5,3) = 4$.

Beweis der Gilbert-Varshamov Schranke

- Konstruiere $((n-k) \times n)$-Parity Check Matrix P, so dass keine $d-1$ Spalten linear abhängig sind.
- Wähle die 1. Spalte von P beliebig in $\mathbb{F}_2^{n-k}$.
- Wahl der i. Spalte von P:
  - Darf keine Linearkombination von $j \leq d-2$ der bisherigen $i-1$ Spalten sein.
  - Anzahl der möglichen Linearkombinationen

$$N_i = \sum_{j=1}^{d-2} \binom{i-1}{j}.$$

  - Finden i-te linear unabhängige Spalte in $\mathbb{F}_2^{n-k}$, falls $N_i + 1 < 2^{n-k}$.
- Finden n linear unabhängige Spalten in $\mathbb{F}_2^{n-k}$, falls $N_n + 1 < 2^{n-k}$.
- Es gilt $N_n + 1 = \sum_{j=0}^{d-2} \binom{n-1}{j} = V^{n-1}(d-2)$ und damit die Bedingung

$$V^{n-1}(d-2) < \frac{2^n}{2^k}.$$

Syndrome

Definition Syndrom

Sei $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Code mit Parity Check Matrix P und $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Das Syndrom von $\mathbf{x}$ ist definiert als $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}P^t$.

Satz Standardarrays und Syndrome

Sei C ein linearer Code mit Standardarray A und Parity Check Matrix P. Die Elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$ sind in derselben Zeile von A gdw $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{y})$.

- Sei $\mathbf{x} = \mathbf{f_i} + \mathbf{c_j}$ und $\mathbf{y} = \mathbf{f_k} + \mathbf{c}_\ell$.
- Es gilt $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{f_i} + \mathbf{c_j}) = S(\mathbf{f_i}) + S(\mathbf{c_j}) = S(\mathbf{f_i})$.
- Analog folgt $S(\mathbf{y}) = S(\mathbf{f_k})$. D.h.

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}) = S(\mathbf{x}) \quad &\Leftrightarrow \quad S(\mathbf{f_i}) = S(\mathbf{f_k}) \\ &\Leftrightarrow \quad S(\mathbf{f_i} - \mathbf{f_k}) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{f_i} - \mathbf{f_k} \in C \;\Leftrightarrow i = k. \end{aligned}$$

Syndromdekodierung mittels Syndromtabelle

- Dekodierung mittels Standardarray: $\mathbf{x} = \mathbf{f_i} + \mathbf{c_j}$ mit Fehlervektor $\mathbf{f_i}$.
- Paarweise verschiedene Fehlervektoren bilden die erste Spalte eines Standardarrays.
- Berechne die folgende Syndromtabelle für C

Fehlervektor	Syndrom
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{f_2}$	$S(\mathbf{f_2})$
$\mathbf{f_3}$	$S(\mathbf{f_3})$
$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{f}_\ell$	$S(\mathbf{f}_\ell)$

Algorithmus Syndromdekodierung

EINGABE: $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$

1. Berechne $S(\mathbf{x})$ und vergleiche mit der Syndromspalte.
2. Falls $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{f_i})$, Ausgabe $\mathbf{c} = \mathbf{x} - \mathbf{f_i}$.

Äquivalente lineare Codes

Definition Äquivalenz von linearen Codes

Sei C ein linearer Code mit Generatormatrix G. Die durch Kombination der drei elementaren Matrixoperationen auf G

1. Vertauschen von zwei Zeilenvektoren
2. Vertauschen von zwei Spaltenvektoren
3. Addition eines Zeilenvektors zu einem anderen Zeilenvektor

entstehenden Codes bezeichnen wir als zu C *äquivalente Codes*.

Fakt Systematische Codes

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code mit Generatormatrix G. Dann gibt es einen zu C äquivalenten Code C' mit Generatormatrix in linker Standardform $G' = (I_k | M_{k,n-k})$. C' nennt man *systematischen Code*.

- Für systematische C': $(x_1, \ldots, x_k)G' = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k})$.
- $y_1, \ldots, y_{n-k}$ nennt man die Redundanz der Nachricht.

Umwandlung Generatormatrix in Parity Check Matrix

Satz Konversion von Generatormatrix in Parity Check Matrix

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code mit Generatormatrix $G = [I_k | A]$. Dann ist

$$P = [A^t | I_{n-k}]$$

eine Parity Check Matrix für C.

Sei C' der Code mit Parity Check Matrix P:

1. Zeigen: $C \subseteq C'$.
   - Für alle Zeilen $\mathbf{g_i}$ von G gilt $\mathbf{g_i}P^t = \mathbf{0}$, denn j-ter Eintrag von $\mathbf{g_i}P^t$:

     $$(0 \ldots 1 \ldots 0 a_{i1} \ldots a_{ik}) \cdot (a_{1j} \ldots a_{kj} 0 \ldots 1 \ldots 0) = a_{ij} + a_{ij} = 0$$

   - Aus $\mathbf{g_i}P^t = \mathbf{0}$ folgt $C \subseteq C'$.
2. Zeigen: $\dim(C) = \dim(C')$
   - P hat $n - k$ linear unabhängige Zeilen.
   - D.h. Dualcode $(C')^\perp$ hat Generatormatrix P und Dimension $n - k$.

     $$\dim(C') = n - \dim((C')^\perp) = n - (n - k) = k = \dim(C).$$

Hamming-Matrix $H(h)$ und Hammingcode $\mathcal{H}(h)$

- Parametrisiert über die Zeilenanzahl h.
- Spaltenvektoren sind Binärdarstellung von $1, 2, \ldots, 2^h - 1$.
- Bsp :

$$H(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hammingcode $\mathcal{H}(h)$ besitzt die Parity Check Matrix $H(h)$.
- Hammingcodes unabhängig entdeckt von Golay (1949) und Hamming (1950).

Satz Hammingcode

Der Hammingcode $\mathcal{H}(h)$ mit Parity Check Matrix $H(h)$ ist ein linearer $[n, k, d]$-Code mit den Parametern

$$n = 2^h - 1, k = n - h \text{ und } d = 3.$$

k und d bei Hammingcodes

- $H(h)$ enthält die h Einheits-Spaltenvektoren $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_h}$.
- Daraus folgt, die Zeilenvektoren von $H(h)$ sind linear unabhängig.
- D.h. $H(h)$ ist eine Generatormatrix des dualen Codes $\mathcal{H}(h)^\perp$.
- Damit ist $\dim(\mathcal{H}(h)^\perp) = h$ und $k = \dim(\mathcal{H}(h)) = n - h$.

- Je zwei Spalten in $H(h)$ sind paarweise verschieden.
- Die minimale Anzahl von linear abhängigen Spalten ist mindestens 3, d.h. $d(\mathcal{H}(h)) \geq 3$.
- Die ersten drei Spalten sind stets linear abhängig, d.h. $d(\mathcal{H}(h)) = 3$.

Dekodierung mit Hammingcodes

Satz Korrigieren eines Fehlers

Sei $\mathbf{c} \in \mathcal{H}(h)$ und $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{e_i}$ für einen Einheitsvektor $\mathbf{e_i} \in \mathbb{F}_2^{2^h - 1}$. Dann entspricht das Syndrom $S(\mathbf{x})$ der Binärdarstellung von i.

- Es gilt $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{e_i}) = \mathbf{e_i} H(h)^t = (H(h)\mathbf{e_i}^t)^t$.
- D.h. $S(\mathbf{x})$ entspricht der i-ten Spalte von $H(h)$, die wiederum die Binärkodierung von i ist.

Bsp:

- Verwenden $\mathcal{H}(3)$ und erhalten $\mathbf{x} = 1000001$.

$$S(\mathbf{x}) = (1000001)H(3)^t = (110).$$

- Da 110 die Binärkodierung von 6 ist, kodieren wir zum nächsten Nachbarn 1000011.

Simplex Code: Dualcode des Hammingcodes

Satz Simplex Code

Der Dualcode des Hammingcodes $\mathcal{H}(h)$ wird als Simplex Code $\mathcal{S}(h)$ bezeichnet. $\mathcal{S}(h)$ ist ein $[2^h - 1, h, 2^{h-1}]$-Code, bei dem für *alle verschiedenen* $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathcal{S}(h)$ gilt, dass $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = 2^{h-1}$.

- Hamming-Matrix $H(h)$ ist Generatormatrix von $\mathcal{S}(h) = \mathcal{H}(2)^{\perp}$.
- Da $\dim(\mathcal{S}(h)) = n - \dim(\mathcal{H}(h))$, ist $S(h)$ ein $[2^h - 1, h]$-Code.
- Es gilt $H(h+1) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \hline & & & 0 & & & \\ & H(h) & & \vdots & & H(h) & \\ & & & 0 & & & \end{array}\right)$.
- Sei $\bar{\mathbf{c}}$ das Komplement von $\mathbf{c}$ ist. Dann gilt

$$\mathcal{S}(h+1) = \{\mathbf{c}0\mathbf{c} | \mathbf{c} \in \mathcal{S}(h)\} \cup \{\mathbf{c}1\bar{\mathbf{c}} | \mathbf{c} \in \mathcal{S}(h)\}.$$

Distanz 2^{h-1} zwischen zwei Worten im Simplex Code

Beweis von $d(\mathbf{c},\mathbf{c}') = 2^{h-1}$ per Induktion über h

IV $h = 1$:

- $H(1) = (1)$, d.h. $\mathcal{S} = \{0,1\}$ und damit $d(0,1) = 1 = 2^0$.

IS $h \to h+1$:

- Fall 1: $d(\mathbf{c}0\mathbf{c},\mathbf{c}'0\mathbf{c}') = 2 \cdot d(\mathbf{c},\mathbf{c}') = 2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$.
- Fall 2: $d(\mathbf{c}1\bar{\mathbf{c}},\mathbf{c}'1\bar{\mathbf{c}}') = d(\mathbf{c},\mathbf{c}') + d(\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{c}}') = 2 \cdot d(\mathbf{c},\mathbf{c}') = 2^h$.
- Fall 3:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{c}0\mathbf{c},\mathbf{c}'1\bar{\mathbf{c}}') &= d(\mathbf{c},\mathbf{c}') + 1 + d(\mathbf{c},\bar{\mathbf{c}}') \\ &= d(\mathbf{c},\mathbf{c}') + 1 + (2^h - 1 - d(\mathbf{c},\mathbf{c}')) = 2^h. \end{aligned}$$

Der Golay Code $\mathcal{G}_{24}$ (Golay 1949)

- $\mathcal{G}_{24}$ ist ein $[24, 12]$-Code mit Generator-Matrix $G = [I_{12}|A]$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Distanz des Codes $\mathcal{G}_{24}$

Lemma $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^{\perp}$

$\mathcal{G}_{24}$ ist selbst-dual, d.h. $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^{\perp}$.

- Man prüfe nach, dass für je zwei Zeilen $\mathbf{g_i}, \mathbf{g_j}$ aus G gilt $\mathbf{g_i} \cdot \mathbf{g_j} = 0$.
- D.h. $\mathcal{G}_{24} \subseteq \mathcal{G}_{24}^{\perp}$. Wegen $\dim(\mathcal{G}_{24}) = \dim(\mathcal{G}_{24}^{\perp})$ folgt $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^{\perp}$.

Korollar Alternative Generatormatrix

Die Matrix $[A|I_{12}]$ ist ebenfalls eine Generatormatrix des $\mathcal{G}_{24}$.

- Wegen $G = [I_{12}|A]$ ist $[A^t|I_{24-12}] = [A|I_{12}]$ eine Parity Check Matrix für $\mathcal{G}_{24}$.
- Da $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^{\perp}$ ist $[A|I_{12}]$ ebenso eine Parity Check Matrix für $\mathcal{G}_{24}^{\perp}$.
- Da die Zeilen von $[A|I_{12}]$ linear unabhängig sind, ist $[A|I_{12}]$ eine Generatormatrix von $\mathcal{G}_{24}^{\perp\perp} = \mathcal{G}_{24}$.

Die Distanz des $\mathcal{G}_{24}$

Parameter des $\mathcal{G}_{24}$

$\mathcal{G}_{24}$ ist ein $[24, 12, 8]$-Code.

Zeigen zunächst, dass $w(\mathbf{c}) = 0 \mod 4$ für alle $\mathbf{c} \in C$.

- Für jede Zeile $\mathbf{g_i}$ aus G gilt: $w(\mathbf{g_i}) = 0 \mod 4$.
- Seien $\mathbf{g_i}, \mathbf{g_j}$ Zeilen aus G. Dann gilt

$$w(\mathbf{g_i} + \mathbf{g_j}) = w(\mathbf{g_i}) + w(\mathbf{g_j}) - 2\mathbf{g_i} \cdot \mathbf{g_j}.$$

- $\mathcal{G}_{24}$ ist selbst-dual, d.h. $\mathbf{g_i} \cdot \mathbf{g_j} = 0$. Damit gilt $w(\mathbf{g_i} + \mathbf{g_j}) = 0 \mod 4$.
- D.h. für jedes $\mathbf{c} = (((\mathbf{g_{i_1}} + \mathbf{g_{i_2}}) + \mathbf{g_{i_3}}) + \ldots + \mathbf{g_{i_\ell}})$ folgt $4 | w(\mathbf{c})$.

Zeigen nun, dass $w(\mathbf{c}) > 4$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{G}_{24}$, $\mathbf{c} \neq 0$.

- Damit folgt $w(\mathbf{c}) \geq 8$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{G}_{24}$, $\mathbf{c} \neq 0$.
- Zweite Zeile von G ist Codewort mit Gewicht 8, d.h. $d(\mathcal{G}_{24}) = 8$.

$w(\mathbf{c}) > 4$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{G}_{24}$, $\mathbf{c} \neq 0$

- $\mathbf{c}$ ist Linearkombination von $G_1 = [I_{12}|A]$ bzw. von $G_2 = [A|I_{12}]$.
- Sei $\mathbf{c} = LR$ mit $L, R \in \{0,1\}^{12}$. Es gilt $w(L), w(R) \geq 1$.
- Sei $w(L) = 1$. Dann ist $\mathbf{c}$ eine Zeile von G_1 und damit $w(\mathbf{c}) > 4$.
- Analog folgt für $w(R) = 1$, dass $\mathbf{c}$ Zeile von G_2 ist mit $w(\mathbf{c}) > 4$.
- Sei $w(L) = w(R) = 2$, d.h. $\mathbf{c}$ ist Linearkombination zweier Zeilen.
- Es ist nicht schwer zu prüfen, dass die Summe zweier Zeilen in G_1 bzw G_2 stets Gewicht größer 4 besitzt.

Der Golay Code $\mathcal{G}_{23}$

- $\mathcal{G}_{23}$ entsteht aus $\mathcal{G}_{24}$ durch Entfernen der letzten Spalte in G.

Parameter des $\mathcal{G}_{23}$

Satz $\mathcal{G}_{23}$ ist ein perfekter $[23, 12, 7]$-Code.

- Hammingdistanz von $\mathcal{G}_{24}$ beträgt 8, d.h. Zeilen von G bleiben linear unabhängig nach Entfernen der letzten Spalte.
- Daraus folgt $\dim(\mathcal{G}_{23}) = \dim(\mathcal{G}_{24})$.
- $d(\mathcal{G}_{23}) \in \{7, 8\}$. 3. Zeile der Generatormatrix liefert $d(\mathcal{G}_{23}) = 7$.
- Erinnerung: $\mathcal{G}_{23}$ ist perfekt wegen $M = 2^{12} = \frac{2^{23}}{V^{23}(\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor)}$.

Bedeutung von Hamming- und Golay-Codes

Fakt van Lint, Tietäväinen, Best, Hong

Alle binären nicht-trivialen perfekten Codes C besitzen die Parameter eines Hamming- oder Golay-Codes.

1. Falls C die Parameter eines Golay Codes besitzt, ist C äquivalent zu diesem Golay-Code.
2. Falls C linear ist und die Parameter eines Hamming-Codes besitzt, ist C äquivalent zu diesem Hamming-Code.

Reed-Muller Codes

- Reed-Muller Code $\mathcal{R}(r,m)$ ist definiert für $m \in \mathbb{N}$, $0 \le r \le m$.
- Betrachten nur Reed-Muller Codes 1. Ordnung $\mathcal{R}(1,m) = \mathcal{R}(m)$.

Definition Rekursive Darstellung von Reed-Muller Codes

1. $\mathcal{R}(1) = \mathbb{F}_2^2 = \{00, 01, 10, 11\}$.
2. Für $m \ge 1$: $\mathcal{R}(m+1) = \{\mathbf{cc} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\} \cup \{\mathbf{c\bar{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\}$.

- $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine Generatormatrix für $\mathcal{R}(1)$.
- $\mathcal{R}(2) = \{0000, 0011, 0101, 0110, 1010, 1001, 1111, 1100\}$ mit Generatormatrix

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Parameter der Reed-Muller Codes

Satz Reed-Muller Parameter

$\mathcal{R}(m)$ ist ein linearer $(2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$-Code. Für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(1) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ gilt $w(\mathbf{c}) = 2^{m-1}$.

IA: $m = 1$

- $\mathcal{R}(1)$ ist ein linearer $(2^1, 2^2, 2^0)$-Code. $01, 10$ besitzen Gewicht 2^0.

IS: $m \to m+1$

- $n = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$.
- $\{\mathbf{cc} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\}$ und $\{\mathbf{c\bar{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\}$ sind disjunkt, d.h. $k = 2 \cdot 2^{m+1} = 2^{m+2}$.
- Sei $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(m) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.
  - Für $\mathbf{cc}$ gilt $w(\mathbf{cc}) = 2w(\mathbf{c}) = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$.
  - Für $\mathbf{c\bar{c}}$ gilt $w(\mathbf{c\bar{c}}) = w(\mathbf{c}) + w(\bar{\mathbf{c}}) = 2^{m-1} + (2^m - 2^{m-1}) = 2^m$.
- Für $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{c\bar{c}} = \mathbf{01}$ mit $w(\mathbf{01}) = 2^m$.
- Für $\mathbf{c} = \mathbf{1}$ gilt $\mathbf{c\bar{c}} = \mathbf{10}$ mit $w(\mathbf{10}) = 2^m$.

Reed-Muller Generatormatrizen

Satz Generatormatrix für $\mathcal{R}(m)$

Sei R_m eine Generatormatrix für $\mathcal{R}(m)$. Dann ist

$$R_{m+1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hline & R_m & & & R_m & \end{array}\right)$$

eine Generatormatrix für $\mathcal{R}(m+1)$.

- **Ann.**: $\exists$ nicht-triviale Linearkombination, die $\mathbf{0}$ liefert.
- Linearkombination kann nicht nur die erste Zeile enthalten.
- D.h. es gibt eine nicht-triviale Linearkombination der Zeilen $2 \dots m+2$, die den Nullvektor auf der ersten Hälfte liefert. (Widerspruch: R_m ist Generatormatrix für $\mathcal{R}(m)$.)
- Sei C der Code mit Generatormatrix R_{m+1}.
- Für $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)$ gilt: $\mathbf{cc} \in C$ und $\mathbf{c\bar{c}} \in C$. D.h. $\mathcal{R}(m+1) \subseteq C$.
- $\dim(C) = m+1 = \dim(\mathcal{R}(m+1))$ und damit $C = \mathcal{R}(m+1)$.

Charakterisierung der Generatormatrizen

Bsp:

$$R_3 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Streiche Einserzeile aus R_m. Dann

- besitzen die Zeilenvektoren Länge m und
- bestehen aus Binärkodierungen von $0, 1, \ldots, 2^m - 1$.

Vergleich von Hamming und Reed-Muller Codes

	$\mathcal{H}(m)$	$\mathcal{R}(m)$
Codewortlänge	$2^m - 1$	2^m
Anzahl Codeworte	2^{2^m-1-m}	2^{m+1}
Distanz	3	2^{m-1}

Dekodierung von Reed-Muller Codes

- $\mathcal{R}(m)$ kann $\left\lfloor \frac{2^{m-1}-1}{2} \right\rfloor = 2^{m-2} - 1$ Fehler korrigieren.
- Syndrom-Tabelle besitzt $\frac{2^{2^m}}{2^{m+1}} = 2^{2^m-m-1}$ Zeilen.

Bsp: $\mathcal{R}(\mathbf{3})$ ist 1-fehlerkorrigierend.

$$R_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \\ \mathbf{r_3} \\ \mathbf{r_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathbf{c} = \alpha_1\mathbf{r_1} + \alpha_2\mathbf{r_2} + \alpha_3\mathbf{r_3} + \alpha_4\mathbf{r_4}$. Es gilt

- $c_1+c_5 = \alpha_1(r_{11}+r_{15})+\alpha_2(r_{21}+r_{25})+\alpha_3(r_{31}+r_{35})+\alpha_4(r_{41}+r_{45}) = \alpha_1$
- $c_2+c_6 = \alpha_1(r_{12}+r_{16})+\alpha_2(r_{22}+r_{26})+\alpha_3(r_{32}+r_{36})+\alpha_4(r_{42}+r_{46}) = \alpha_1$
- Ebenso $\alpha_1 = c_3 + c_7 = c_4 + c_8$.

Mehrheitsdekodierung

- Suche für jede Zeile i Spaltenpaar (u, v), so dass sich die Spalten u, v nur in der i-ten Zeile unterscheiden. Liefert Gleichung für α_i.
- Für Zeile 1: $(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)$, d.h. im Abstand 4.
- Für Zeile 2: $(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 8)$, d.h. im Abstand 2.
- Für Zeile 3: $(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)$, d.h. im Abstand 1.
- Für Zeile 4: nicht möglich.

- Erhalten für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jeweils 4 Gleichungen in verschiedenen c_i.
- Falls $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{e_i}$, ist genau 1 von 4 Gleichungen inkorrekt.

Algorithmus Mehrheitsdekodierung Reed-Muller Code $\mathcal{R}(m)$

1. Bestimme $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ per Mehrheitsentscheid.
2. Berechne $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{r_i}$.
3. Falls $w(\mathbf{e}) \leq 2^{m-2} - 1$, dekodiere $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$.
4. Falls $w(\bar{\mathbf{e}}) \leq 2^{m-2} - 1$, dekodiere $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \bar{\mathbf{e}}$.

Beispiel Mehrheitsdekodierung

- Verwenden $\mathcal{R}(3)$ und erhalten $\mathbf{x} = 11011100$.
  - $\alpha_1 = x_1 + x_5 = 0$
  - $\alpha_1 = x_2 + x_6 = 0$
  - $\alpha_1 = x_3 + x_7 = 0$
  - $\alpha_1 = x_4 + x_8 = 1$
- Mehrheitsentscheid liefert $\alpha_1 = 0$.
  - $\alpha_2 = x_1 + x_3 = 1$
  - $\alpha_2 = x_2 + x_4 = 0$
  - $\alpha_2 = x_5 + x_7 = 1$
  - $\alpha_2 = x_6 + x_8 = 1$
- Mehrheitsentscheid liefert $\alpha_2 = 1$ und analog $\alpha_3 = 0$.
- $\mathbf{e} = \mathbf{x} - 0 \cdot \mathbf{r_1} - 1 \cdot \mathbf{r_2} - 0 \cdot \mathbf{r_3} = 11011100 - 00110011 = 11101111$.
- $w(\bar{\mathbf{e}}) \leq 1$, d.h. $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \bar{\mathbf{e}} = 11001100$.

McEliece Verfahren (1978)

- **Dekodieren eines zufälligen linearen Codes ist NP-hart.**
- Verwende linearen Code C mit effizientem Dekodierverfahren (z.B. sogenannten Goppa-Code).
- Generatormatrix von C bildet den geheimen Schlüssel.
- C wird in äquivalenten linearen Code C' transformiert.

Algorithmus Schlüsselgenerierung McEliece

1. Wähle linearen $[n, k, d]$-Code C mit Generatormatrix G.
2. Wähle zufällige binäre $(k \times k)$-Matrix S mit $\det(S) = 1$.
3. Wähle zufällige binäre $(n \times n)$-Permutationsmatrix P.
4. $G' \leftarrow SGP$

öffentlicher Schlüssel: G', geheimer Schlüssel S, G, P.

McEliece Verschlüsselung

Algorithmus McEliece Verschlüsselung

EINGABE: Plaintext $\mathbf{m} \in \mathbb{F}_2^k$

1. Wähle zufälligen Fehlervektor $\mathbf{e} \in \mathbb{F}_2^n$ mit $w(\mathbf{e}) = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$.
2. $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{m}G' + \mathbf{e}$.

AUSGABE: Ciphertext $\mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n$

Vorgeschlagene Parameter:

- $[1024, 512, 101]$-Goppacode C.
- Plaintextlänge: 512 Bit, Chiffretextlänge: 1024 Bit.
- Größe des öffentlichen Schlüssels: 512×1024 Bit.

McEliece Entschlüsselung

Algorithmus McEliece Entschlüsselung

EINGABE: Ciphertext $\mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n$

1. $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{c}P^{-1}$.
2. Dekodiere $\mathbf{x}$ mittels Dekodieralgorithmus für C zu $\mathbf{m}'$.
3. $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m}'S^{-1}$

AUSGABE: Plaintext $\mathbf{m} \in \mathbb{F}_2^k$

- **Korrektheit**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}P^{-1} = (\mathbf{m}G' + \mathbf{e}) \cdot P^{-1} = (\mathbf{m}SGP + \mathbf{e}) \cdot P^{-1} = (\mathbf{m}S)G + \mathbf{e} \cdot P^{-1}.$$

- $\mathbf{e} \cdot P^{-1}$ besitzt Gewicht $w(\mathbf{e}P^{-1}) = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$.
- Dekodierung liefert $\mathbf{m}' = \mathbf{m}S$, d.h. $\mathbf{m} = \mathbf{m}'S^{-1}$.

Stern Identifikationsschema

- Dekodieren eines zufälligen linearen Codes ist NP-hart.
- Definiere zufälligen Code mittels zufälliger Parity Check Matrix.

Gegeben: $[n,k]$-Code C mittels $P \in \mathbb{F}_2^{(n-k)\times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$

Gesucht: $e \in \mathbb{F}_2^n$ mit $\mathbf{x} - \mathbf{e} = \mathbf{c} \in C$, so dass $w(\mathbf{e})$ minimal ist, d.h gesucht ist $\mathbf{e}$ minimalen Gewichts mit $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{e}) = \mathbf{e}P^t$.

Stern Schlüsselerzeugung

Globale Parameter:

1. Parity Check Matrix $P \in \mathbb{F}_2^{(n-k)\times n}$ mit linear unabhängigen Zeilen.
2. Gewicht $g \in \mathbb{N}$

Jeder Teilnehmer wählt

1. Geheimer Schlüssel: $\mathbf{e} \in F_2^n$ mit $w(\mathbf{e}) = g$
2. Öffentlicher Schlüssel: $\mathbf{e}P^t$

- Vorgeschlagen: $[n,k] = [512, 256]$ und $g = w(\mathbf{e}) = 56$.
- **Idee Identifikation:** Beweise Besitz von $\mathbf{e}$, ohne $\mathbf{e}$ preiszugeben.

Identifikationsverfahren

Algorithmus Stern Identifikation

Prover: Wähle zufällige $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$ und Permutation $\sigma : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$.
Hinterlege beim Verifier

$$c_0 = \sigma(\mathbf{y} + \mathbf{e}), c_1 = \sigma(\mathbf{y}) \text{ und } c_2 = (\sigma, \mathbf{y}P^t).$$

Verifier: Wähle zufälliges $b \in \{0, 1, 2\}$ für Prüfung von $c_i, i \neq b$.

Prover: Falls $b = 0$: Sende $\mathbf{y}$,σ und öffne c_1, c_2.
Falls $b = 1$: Sende $\mathbf{y} + \mathbf{e}, \sigma$ und öffne c_0, c_2.
Falls $b = 2$: Sende $\sigma(\mathbf{y}), \sigma(\mathbf{e})$ und öffne c_0, c_1.

Verifier: Falls $b = 0$: Prüfe Korrektheit von c_1 und c_2.
Falls $b = 1$: Prüfe c_0 und $c_2 = (\sigma, (\mathbf{y} + \mathbf{e})P^t - \mathbf{e}P^t)$.
Falls $b = 2$: Prüfe $c_0 = \sigma(\mathbf{y}) + \sigma(\mathbf{e}), c_1, w(\sigma(\mathbf{e})) = w(\mathbf{e})$.

Korrektheit: Nur Besitzer von **e** bestehen Protokoll.

- **Completeness:** Falls Prover **e** besitzt, akzeptiert Verifier.
- **Soundness:** Falls Prover **e** nicht besitzt, besteht er das Protokoll mit Ws höchstens $\frac{2}{3}$.
- **Strategie 1**: Prover wählt σ, **y** und $\tilde{\mathbf{e}}$ mit Gewicht $w(\tilde{\mathbf{e}})$.
  - Prover besteht nur $b = 1$ nicht, da hier $\tilde{\mathbf{e}}P^t \neq \mathbf{e}P^t$.
- **Strategie 2**: Prover wählt σ, **y** und $\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{e}}$ mit $\tilde{\mathbf{e}}P^t = \mathbf{0}$.
  - Prover besteht nur $b = 2$ nicht, da hier $w(\tilde{\mathbf{e}}) \neq w(\mathbf{e})$.
- Prover wählt **Strategie 1** und **Strategie 2** jeweils mit Ws $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ws}(\mathrm{P\ besteht\ Protokoll})\\ &= \mathrm{Ws}(b \neq 1) \cdot \mathrm{Ws}(\textbf{Strategie 1}) + \mathrm{Ws}(b \neq 2) \cdot \mathrm{Ws}(\textbf{Strategie 2})\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Fakt (Beweis ist nicht-trivial)

Jeder Angreifer mit $\mathrm{Ws} > \frac{2}{3}$ liefert Berechnung von **e**.

- Intuitiv: Prover kann nur $b = 1$ und 2 bestehen, falls er **e** kennt.

Zeroknowledge Eigenschaft

- **Zeroknowledge:** Verifier lernt nichts über **e**.
- Verifier lernt für
  - $b = 0$: Zufälliges $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$, unabhängig von **e**.
  - $b = 1$: Zufälliges $\mathbf{y} + \mathbf{e} \in \mathbb{F}_2^n$, da $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$ zufällig ist.
    (D.h. **y** ist One-Time Pad für **e**.)
  - $b = 2$: Zufälliges $\sigma(\mathbf{e}) \in \mathbb{F}_2^n$ mit Gewicht $w(\mathbf{e})$.
- Formaler Zeroknowledge Beweis verwendet Simulator für Prover, ohne dabei **e** zu kennen.

Einführung in die NP-Vollständigkeitstheorie

Notationen

- Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ aus Buchstaben a_i
- Worte der Länge n sind Elemente aus $A^n = \{a_{i_1} \ldots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A\}$.
- $A^0 = \epsilon$, ϵ ist das leere Wort.
- $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n, A^+ = A^* \setminus \epsilon, A^{\leq m} = \bigcup_{n=0}^{m} A^n$
- Länge $|a_1 \ldots a_n| = n$. $\mathrm{bin}(a_1)$ ist Binärkodierung von a_1.

Definition Sprache L

Sei A ein Alphabet. Eine Menge $L \subseteq A^*$ heißt *Sprache* über dem Alphabet A. Das *Komplement* von L über A ist definiert als $\bar{L} = A^* \setminus L$.

Turingmaschine (informal)

Turingmaschine besteht aus:

- Einseitig unendlichem Band mit Zellen (Speicher),
- Kontrolle und einem Lesekopf, der auf einer Zelle steht.

Arbeitsweise einer Turingmaschine

- Bandsymbol $\triangleright$ steht in der Zelle am linken Bandende.
- Kontrolle besitzt Zustände einer endlichen Zustandsmenge.
- Abhängig vom Zelleninhalt und Zustand schreibt die Kontrolle ein Zeichen und bewegt den Lesekopf nach links oder rechts.
- Zu Beginn der Berechnung gilt:
  - Lesekopf befindet sich auf dem linken Bandende $\triangleright$.
  - Band enthält $\triangleright a_1 \ldots a_n \sqcup \sqcup \ldots$, wobei $a_1 \ldots a_n$ die Eingabe ist.
- Turingmaschine M hält nur, falls Kontrolle in Zuständen q_a oder q_r.
  - Falls M in q_a hält: M akzeptiert die Eingabe $a_1 \ldots a_n$.
  - Falls M in q_r hält: M verwirft die Eingabe $a_1 \ldots a_n$.
  - Falls M nie in die Zustände q_a, q_r kommt: M läuft unendlich.

Turingmaschine (formal)

Definition Deterministische Turingmaschine (Turing 1936)

Eine deterministische Turingmaschine DTM ist ein 4-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta)$ bestehend aus

1. Zustandmenge Q: Enthält Zustände q_a, q_r, s.
2. Bandalphabet Γ mit $\sqcup, \rhd \in \Gamma$
3. Eingabealphabet $\Sigma \subset \Gamma \setminus \{\sqcup, \rhd\}$.
4. Übergangsfunktion $\delta : Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
   - Es gilt stets am linken Bandende $\delta(q, \rhd) = (q', \rhd, R)$.
   - Es gilt nie $\delta(q, a) = (q', \rhd, L/R)$ (nicht am linken Bandende).

Beispiel DTM M_1

Bsp: $a^n, n \geq 1$

- $Q = \{q_0, q_1, q_a, q_r\}$ mit $s = q_0$
- $\Sigma = \{a\}$ und $\Gamma = \{\sqcup, \triangleright, a\}$
- Übergangsfunktion

δ	a	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	(q_1, a, R)	$(q_r, \sqcup, R)$	$(q_0, \triangleright, R)$
q_1	(q_1, a, R)	$(q_a, \sqcup, R)$	$(q_1, \triangleright, R)$

Notation der Konfigurationen bei Eingabe a^2:

$$
\begin{array}{ll}
 & q_0 \triangleright aa \\
\vdash & \triangleright q_0 aa \\
\vdash & \triangleright a q_1 a \\
\vdash & \triangleright aa q_1 \sqcup \\
\vdash & \triangleright aa \sqcup q_a \sqcup
\end{array}
$$

Nachfolgekonfigurationen

Notation Nachfolgekonfiguration

- Direkte Nachfolgekonfiguration: $aqb \vdash a'q'b'$
- i-te Nachfolgekofiguration: $aqb \vdash^i a'q'b'$
- Indirekte Nachfolgekonfiguration $aqb \vdash^* a'b'q'$, d.h. $\exists i \in \mathbb{N} : aqb \vdash^i a'q'b'$.

Akzeptanz und Ablehnen von Eingaben

- DTM M erhalte Eingabe $w \in \Sigma^*$.
  - M akzeptiert $w \Leftrightarrow \exists a, b \in \Gamma^* \text{ mit } s \triangleright w \vdash^* aq_a b$
  - M lehnt w ab $\Leftrightarrow \exists a, b \in \Gamma^* \text{ mit } s \triangleright w \vdash^* aq_r b$

Akzeptierte Sprache, L rekursiv aufzählbar

Definition Akzeptierte Sprache, Rekursive Aufzählbarkeit

Sei M eine DTM. Dann bezeichne

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert Eingabe } w\}$$

die von M *akzeptierte Sprache*.
Eine Sprache L heißt *rekursiv aufzählbar* gdw eine DTM M existiert mit $L = L(M)$.

- Unsere Beispiel DTM M_1 akzeptiert die Sprache $L(M_1) = \{a\}^+$.
- D.h. $L = \{a\}^+$ ist rekursiv aufzählbar, da für M_1 gilt $L = L(M_1)$.
- Aus der obigen Definition folgt:
  L ist nicht rekursiv aufzählbar $\Leftrightarrow \nexists$ DTM M mit $L = L(M)$.
- Es gibt Sprachen, die nicht rekursiv aufzählbar sind, z.B.
  $\bar{H} = \{\langle M, x\rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } w \text{ nicht.}\}$. (ohne Beweis)

Definition Entscheidbarkeit und rekursive Sprachen

Definition Entscheidbarkeit

Sei M eine DTM, die die Sprache $L(M)$ akzeptiert. Wir sagen, dass M die Sprache $L(M)$ *entscheidet* gdw M alle Eingaben $w \in \bar{L}$ ablehnt.
D.h. insbesondere M hält auf allen Eingaben.
Eine Sprache L heißt *entscheidbar* gdw eine DTM M existiert, die L entscheidet.

- Unsere Beispiel-DTM M_1 entscheidet die Sprache $L(M_1) = \{a\}^+$.
- $L = \{a\}^+$ ist entscheidbar, da M_1 die Sprache L entscheidet.

Korollar Entscheidbarkeit impliziert rekursive Aufzählbarkeit

Sei L eine entscheidbare Sprache. Dann ist L rekursiv aufzählbar.

- Die Rückrichtung stimmt nicht:
  Es gibt rekursiv aufzählbare L, die nicht entscheidbar sind, z.B.
  $H = \{\langle M, x\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } w.\}$. (ohne Beweis)

Entscheiden versus Berechnen

Definition Berechnung von Funktionen

Eine DTM M berechnet die Funktion $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, falls M für jedes $(a_1, \ldots, a_n)$ bei Eingabe $\mathrm{bin}(a_1)\#\ldots\#\mathrm{bin}(a_n)$ den Bandinhalt $\mathrm{bin}(f(a_1, \ldots, a_n))$ berechnet und in q_a hält.

- Werden der Einfachheit halber Sprachen entscheiden, nicht Funktionen berechnen.

Laufzeit einer DTM, Klasse DTIME

Definition Laufzeit einer DTM

Sei M eine DTM mit Eingabealphabet Σ, die bei jeder Eingabe hält. Sei $T_M(w)$ die Anzahl der Rechenschritte – d.h. Bewegungen des Lesekopfes von M – bei Eingabe w. Dann bezeichnen wir die Funktion

$$T_M(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } T_M(n) = \max\{T_M(w) \mid w \in \Sigma^{\leq n}\}$$

als *Zeitkomplexität* bzw. *Laufzeit* der DTM M.

- Die Laufzeit wächst monoton in n.
- Unsere Beispiel-DTM M_1 mit $L(M_1) = \{a\}^*$ besitzt Laufzeit $\mathcal{O}(n)$.

Definition DTIME

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Die Klasse DTIME ist definiert als

$$\text{DTIME}(t(n)) := \{L \mid L \text{ wird von DTM mit Laufzeit } \mathcal{O}(t(n)) \text{ entschieden.}\}.$$

- Es gilt $L(M_1) \in DTIME(n)$.

Registermaschine RAM

Registermaschine RAM besteht aus den folgenden Komponenten:

- Eingabe-/ und Ausgabe-Register
- Speicherregister
- Programm
- Befehlszähler
- Akkumulator

Funktionsweise einer RAM:

- Liest Eingabe aus Eingaberegister und lässt Programm auf Eingabe laufen.
- Führt Arithmetik im Akkumulator aus.
- Ergebnisse können im Speicherregister gespeichert werden.
- Befehlszähler realisiert Sprünge, Schleifen und bedingte Anweisungen im Programm.
- Ausgabe erfolgt im Ausgaberegister.

DTMs versus RAMs, Churchsche These

Fakt Polynomielle Äquivalenz von DTMs und RAMs

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion mit $t(n) \geq n$. Jede RAM mit Laufzeit $t(n)$ kann durch eine DTM M mit Laufzeit $\mathcal{O}(t(n)^3)$ simuliert werden.

Churchsche These (1936)

"Die im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen sind genau die durch Turingmaschinen berechenbaren Funkionen."

- These ist nicht beweisbar oder widerlegbar.
- Alle bekannten Berechenbarkeitsbegriffe führen zu DTM-berechenbaren Funktionen.

Die Klasse $\mathcal{P}$

Definition Klasse $\mathcal{P}$

Die Klasse P ist definiert als

$$\mathcal{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DTIME(n^k).$$

- $L \in \mathcal{P}$ gdw eine DTM existiert, die L in Laufzeit $\mathcal{O}(n^k)$ entscheidet.
- $\mathcal{P}$ ist die Klasse aller in Polynomialzeit entscheidbaren Sprachen. (auf DTMs, RAMs, etc.)
- Hintereinanderausführung/Verzahnung von DTMs mit polynomieller Laufzeit liefert polynomielle Gesamtlaufzeit.
- $\mathcal{P}$ beinhaltet praktische und theoretisch interessante Probleme.
- Probleme ausserhalb von $\mathcal{P}$ sind in der Praxis oft nur für kleine Instanzen oder approximativ lösbar.

Kodierung der Eingabe

- Erinnerung: Zeitkomplexität $T_M(n)$ ist eine Funktion in $|w| = n$.
- Benötigen geeignete Kodierung der Eingabe w.
- Kodierung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$
  - Verwenden Binärkoderung $\mathrm{bin(n)}$ mit Eingabelänge $\Theta(\log n)$.
- Kodierung eines Graphen $G = (V, E)$
  - Kodieren Knotenanzahl n unär, d.h. $|V| = n$.
  - m Kanten mit Adjazenzliste $|E| = m$ oder Adjazenzmatrix $|E| = n^2$.

Bsp:

- $\textsc{Pfad} := \{G, s, t \mid G \text{ ist Graph mit Pfad von } s \text{ nach } t.\} \in \mathcal{P}$.
  - Starte Breitensuche in s.
  - Falls t erreicht wird, akzeptiere. Sonst lehne ab.
  - Laufzeit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, d.h. linear in der Eingabelänge von G.
- $\textsc{Teilerfremd} := \{x, y \mid \gcd(x, y) = 1\} \in \mathcal{P}$.
  - Berechne mittels Euklidischem Algorithmus $d = \gcd(x, y)$.
  - Falls $d = 1$, akzeptiere. Sonst lehne ab.
  - $\mathcal{O}(\log^2(\max\{x, y\}))$, quadratisch in $|x| = \Theta(\log x)$, $|y| = \Theta(\log y)$.

Optimierungsvariante vs Entscheidungsvariante

RUCKSACK$_{opt}$

- Gegeben: Gegenstände $1, \ldots, n$ mit Gewichten $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ und Profiten $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Kapazität B.
- Gesucht: $I \subseteq [n] : \sum_{i \in I} w_i \leq B$, so dass $\sum_{i \in I} p_i$ maximiert wird.

Sprache RUCKSACK:

$$\text{RUCKSACK} := \{(W, P, B, k) \mid \exists I \subseteq [n] : \textstyle\sum_{i \in I} w_i \leq B \text{ und } \sum_{i \in I} p_i \geq k\}.$$

Naiver Algorithmus zum Entscheiden von RUCKSACK

1. Für alle $I \subseteq [n]$:
   1. Falls $\sum_{i \in I} w_i \leq B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geq k$, akzeptiere.
2. Lehne ab.

- Prüfung von 2^n vielen Untermengen in Schritt 1.
- D.h. die Gesamtlaufzeit ist exponentiell in der Eingabelänge.
- Prüfung *einzelner potentieller Lösungen* in Schritt 1.1 ist effizient.

Polynomielle Verifizierer und NP

Definition Polynomieller Verifizierer

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Eine DTM V heißt *Verifizierer für* L, falls V für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ hält und folgendes gilt:

$$w \in L \Leftrightarrow \exists c \in \Sigma^* : V \text{ akzeptiert Eingabe } (w, c).$$

Das Wort c nennt man einen *Zeugen oder Zertifikat für* w.

V heißt *polynomieller Verifizierer für* L, falls für alle $w \in \Sigma^*$:

$$w \in L \Leftrightarrow \exists c \in \Sigma^*, |c| \leq |w|^k, k \in \mathbb{N} : V \text{ akzeptiert Eingabe } (w, c) \text{ in Laufzeit polynomiell in } |w|.$$

L ist *polynomiell verifizierbar* $\Leftrightarrow \exists$ polynomieller Verifizierer für L.

Definition Klasse $\mathcal{NP}$

$$\mathcal{NP} := \{L \mid L \text{ ist polynomiell verifizierbar.}\}$$

Polynomieller Verifizierer für RUCKSACK

Satz

RUCKSACK $\in \mathcal{NP}$.

Beweis:

Algorithmus Polynomieller Verifizierer für RUCKSACK

Eingabe: (W, P, B, k, c) mit Zeuge $c = I \subseteq [n]$

1. Falls $\sum_{i \in I} w_i \leq B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geq k$, akzeptiere.
2. Lehne ab.

Laufzeit:

- Eingabegrößen: $\log w_i, \log p_i, \log B, \log k, n$
- Laufzeit: $\mathcal{O}(n \cdot \log(\max_i \{w_i, p_i, B, k\}))$ auf RAM.
- D.h. die Laufzeit ist polynomiell in den Eingabegrößen.

Optimaler Wert einer Lösung mittels Entscheidung

RUCKSACK$_{wert}$

- Gegeben: $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ und B.
- Gesucht: $\max_{I \subseteq [n]} \{\sum_{i \in I} p_i \mid \sum_{i \in I} w_i \leq B\}$

Sei M eine DTM, die RUCKSACK in Laufzeit $T(M)$ einscheide.

Algorithmus Optimum

Eingabe: W, P, B

1. $\ell \leftarrow 1, r \leftarrow \sum_{i=1}^{n} p_i$
2. WHILE $(\ell \neq r)$
   1. Falls M bei Eingabe $(W, P, B, \lceil \frac{\ell+r}{2} \rceil)$ akzeptiert, $\ell \leftarrow \lceil \frac{\ell+r}{2} \rceil$.
   2. Sonst $r \leftarrow \lceil \frac{\ell+r}{2} \rceil - 1$.

Ausgabe: ℓ

- Korrektheit: Binäre Suche nach Optimum auf Intervall $[1, \sum_{i=1}^{n} p_i]$.
- Laufzeit: $\mathcal{O}(\log(\sum_{i=1}^{n} w_i)) \cdot T(M)$.
- Insbesondere: Laufzeit ist polynomiell, falls $T(M)$ polynomiell ist.

Optimale Lösung mittels optimalem Wert

Optimale Lösung

Eingabe: W, P, B

1. $opt \leftarrow \mathrm{Optimum}(W, P, B)$, $I \leftarrow \emptyset$
2. For $i \leftarrow 1$ to n
   1. Falls $(\mathrm{Optimum}(W \setminus \{w_i\}, P \setminus \{p_i\}, B) = opt$, setze $W \leftarrow W \setminus \{w_i\}, P \leftarrow \{p_i\}$.
   2. Sonst $I \leftarrow I \cup \{i\}$.

Ausgabe: I

Korrektheit:

- Invariante vor i-tem Durchlauf: $\exists J \subseteq \{i, \ldots, n\}$: $I \cup J$ ist optimal.
- i wird nur dann in I aufgenommen, falls I zu optimaler Teilmenge erweitert werden kann.

- **Laufzeit:** $\mathcal{O}(n \cdot T(Optimum)) = \mathcal{O}(n \cdot \log(\sum_{i=1}^{n} w_i) \cdot T(M))$.
- D.h. Laufzeit ist polynomiell, falls $T(M)$ polynomiell ist.

Sprache Zusammengesetzt

$\textsc{Zusammengesetzt} := \{N \in \mathbb{N} \mid N = pq \text{ mit } p, q \geq 2\}$

Satz

$\textsc{Zusammengesetzt} \in \mathcal{NP}$.

Beweis:

Algorithmus Polynomieller Verifizierer für Zusammengesetzt

Eingabe: (N, c) mit $c = (p, q) \in \{2, \ldots, N-1\}^2$

1. Berechne $p \cdot q$. Falls $p \cdot q = N$, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Laufzeit:

- Eingabelänge: $|N| = \Theta(\log N)$
- Laufzeit: $\mathcal{O}(\log^2 N)$, d.h. polynomiell in der Eingabelänge.

$\mathcal{P}$ versus $\mathcal{NP}$

Satz

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.

$$
\begin{aligned}
L \in \mathcal{P} \quad &\Rightarrow \quad \exists \text{ DTM } M\text{, die } L \text{ in polynomieller Laufzeit entscheidet.}\\
&\Rightarrow \quad \exists \text{ DTM } M\text{, die stets hält und genau die Eingaben } w \in L\\
&\qquad \text{in Laufzeit polynomiell in } |w| \text{ akzeptiert.}\\
&\Rightarrow \quad \exists \text{ DTM } V\text{, die stets hält und genau die Eingaben } (w, c) \text{ mit}\\
&\qquad w \in L, c = \epsilon \text{ in Laufzeit polynomiell in } |w| \text{ akzeptiert.}\\
&\qquad \text{Dabei verwirft } V \text{ die Eingabe } c \text{ und verwendet } M \text{ auf } w.\\
&\Rightarrow \quad L \in \mathcal{NP}.
\end{aligned}
$$

- **Großes offenes Problem:** Gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$?

Nichtdeterministische Turingmaschinen

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(S)$ die Potenzmenge einer Menge S.

Definition Nichtdeterministische Turingmaschine

Eine *nicht-deterministische Turingmaschine (NTM)* ist ein Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta)$, wobei

- Q, Σ, Γ sind wie bei DTM definiert.
- $\delta : Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$

- Bsp: $\delta(q, a) = \{(q_1, a_1, L), (q_2, a_2, R)\}$.
- NTM besitzt Wahlmöglichkeiten für den Zustandsübergang.
- Beschränken uns oBdA auf NTMs mit ≤ 2 Wahlmöglichkeiten.

Berechnungsbaum

- Seien die Konfigurationen einer NTM Knoten in einem Berechnungsbaum.
  - Die Startkonfiguration bildet den Wurzelknoten.
  - Mögliche Nachfolgekonfigurationen bilden Kinderknoten.
- Pfade heißen Berechnungspfade der NTM.
- Betrachten nur NTMs mit Berechnungspfaden endlicher Länge.
- Ein Berechnungpfad heißt akzeptierend, falls er in q_a endet.

Definition Akzeptierte Sprache einer NTM

Sei N eine NTM.

- N akzeptiert Eingabe $w \Leftrightarrow \exists$ akzeptierenden Berechnungspfad im Berechnungsbaum von N bei Eingabe w.
- Die von N akzeptierte Sprache $L(N)$ ist definiert als $L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid N \text{ akzeptiert die Eingabe } w.\}$.

Die Laufzeit einer NTM

Definition Laufzeit einer NTM

Sei N eine DTM mit Eingabe w.

- $T_N(w) :=$ **maximale** Anzahl Rechenschritte von N auf w, d.h. $T_N(w)$ ist die Länge eines längsten Berechnungspfades.
- $T_N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, T_N(n) := \max\{T_N(w) \mid w \in \Sigma^{\leq n}\}$ heißt *Laufzeit* oder Zeitkomplexität von N.

- Wir definieren die Klasse NTIME für NTMs analog zur Klasse DTIME für DTMs.

Definition NTIME

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion.

$$\text{NTIME}(t(n)) := \{L \mid L \text{ wird von NTM in Laufzeit } \mathcal{O}(t(n)) \text{ entschieden.}\}$$

NTM, die RUCKSACK entscheidet

Algorithmus NTM für RUCKSACK

Eingabe: W, P, B, k

1. Erzeuge nichtdeterministisch einen Zeugen $I \subseteq [n]$.
2. Falls $\sum_{i \in I} w_i \leq B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geq k$, akzeptiere.
3. Sonst lehne ab.

- D.h. NTM erzeugt sich im Gegensatz zum Verifizierer ihren Zeugen I selbst.
- Laufzeit: Schritt 1: $\mathcal{O}(n)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(n \cdot \log(\max_i\{w_i, p_i\}))$.
- D.h. die Laufzeit ist polynomiell in der Eingabelänge.

$\mathcal{NP}$ mittels NTMs

Satz

$\mathcal{NP}$ ist die Klasse aller Sprachen, die von einer NTM in polynomieller Laufzeit entschieden wird, d.h.

$$\mathcal{NP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k).$$

Zeigen:

$$\begin{array}{ll} & \exists \text{ polynomieller Verifizierer für } L \\ \Leftrightarrow & \exists \text{ NTM } N\text{, die } L \text{ in polynomieller Laufzeit entscheidet.} \end{array}$$

Verifizierer $\Rightarrow$ NTM

"$\Rightarrow$": Sei V ein Verifizierer für L mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^k)$ für ein festes k.

Algorithmus NTM N für L

Eingabe: w mit $|w| = n$.

1. Erzeuge nicht-deterministisch einen Zeugen c mit $|c| = \mathcal{O}(n^k)$.
2. Simuliere V mit Eingabe (w, c).
3. Falls V akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

- Korrektheit:
$$\begin{aligned} w \in L \quad &\Leftrightarrow \quad \exists c \text{ mit } |c| = \mathcal{O}(n^k) : V \text{ akzeptiert } (w, c). \\ &\Leftrightarrow \quad N \text{ akzeptiert die Eingabe } w \text{ in Laufzeit } \mathcal{O}(n^k). \end{aligned}$$
- Damit entscheidet N die Sprache L in polynomieller Laufzeit.

NTM $\Rightarrow$ Verifizierer

"$\Leftarrow$: Sei N eine NTM, die L in Laufzeit $\mathcal{O}(n^k)$ entscheidet.

Algorithmus Verifizierer

Eingabe: w, c

1. c ist Kodierung eines Berechnungspfades von N bei Eingabe w.
2. Simuliere N auf Eingabe w auf dem Berechnungspfad c.
3. Falls N akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Korrektheit:

$$\begin{aligned} w \in L &\Leftrightarrow \exists \text{ akzeptierender Berechnungspfad } c \text{ von } N \text{ für } w \\ &\Leftrightarrow V \text{ akzeptiert } (w, c). \end{aligned}$$

Laufzeit:

- Längster Berechnungspfad von N besitzt Länge $\mathcal{O}(n^k)$.
- D.h. die Gesamtlaufzeit von V ist ebenfalls $\mathcal{O}(n^k)$.

Boolesche Formeln

Definition Boolesche Formel

- Eine Boolesche Variable x_i kann Werte aus $\{0, 1\}$ annehmen, wobei 0 $\cong$ falsch und 1 $\cong$ wahr.
- Jede Boolesche Variable x_i ist eine Boolesche Formel.
- Sind ϕ, ϕ' Boolesche Formeln, so auch $\neg\phi, \phi \wedge \phi', \phi \vee \phi'$.
- Operatoren $\neg, \wedge, \vee$ sind geordnet nach absteigender Priorität.
- ϕ ist erfüllbar $\Leftrightarrow \exists$ Belegung der Variablen in ϕ mit $\phi = 1$.

Bsp:

- $\phi = \neg(x_1 \vee x_2) \wedge x_3$ ist erfüllbar mit $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$.
- $\phi' = x_1 \wedge \neg x_1$ ist eine nicht-erfüllbare Boolesche Formel.

Satisfiability SAT

Definition SAT

SAT $:= \{\phi \mid \phi$ ist eine erfüllbare Boolesche Formel.$\}$

Kodierung von ϕ:

- Kodieren Variable x_i durch $\mathrm{bin}(i)$.
- Kodieren ϕ über dem Alphabet $\{0, 1, (,), \neg, \wedge, \vee\}$.

SAT ist polynomiell verifizierbar.

Satz

SAT$\in \mathcal{NP}$.

Beweis

Algorithmus Polynomieller Verifizierer

EINGABE: $(\phi(x_1, \ldots, x_n), \mathbf{c})$, wobei $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \{0, 1\}^n$.

- Falls $\phi(c_1, \ldots, c_n) = 1$, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Korrektheit:

- $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in$ SAT $\Leftrightarrow \exists$ Belegung $\mathbf{c} \in \{0, 1\}^n : \phi(\mathbf{c}) = 1$

Laufzeit:

- Belegung von ϕ mit **c**: $\mathcal{O}(|\phi|)$ auf RAM.
- Auswertung von ϕ auf **c**: $\mathcal{O}(|\phi|^2)$ auf RAM.

Konjunktive Normalform

Definition Konjunktive Normalform (KNF)

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Boolesche Variablen und ϕ eine Boolesche Formel.

- Wir bezeichnen die Ausdrücke x_i und $\neg x_i$ als *Literale*.
- *Klauseln* sind disjunktive Verknüpfungen von Literalen.
- ϕ ist in KNF, falls ϕ eine Konjunktion von Klauseln ist.
- Eine KNF Formel ϕ ist in 3-KNF, falls jede Klausel genau 3 Literale enthält.

Bsp

- $\neg x_1 \vee x_2$ und x_3 sind Klauseln.
- $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge x_3$ ist in KNF.
- $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_3 \vee x_3)$ ist in 3-KNF.

Die Sprache 3-SAT

Definition 3SAT

3SAT:= $\{\phi \mid \phi$ ist eine erfüllbare 3-KNF Boolesche Formel.$\}$

- Offenbar gilt 3SAT $\subset$ SAT.

Satz

3SAT$\in \mathcal{NP}$.

Beweis

Algorithmus NTM für 3SAT

Eingabe: $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in$ 3-KNF

1. Rate nicht-deterministisch eine Belegung $(c_1, \ldots, c_n) \in \{0,1\}^n$.
2. Falls $\phi(c_1, \ldots, c_n) = 1$, akzeptiere. Sonst lehne ab.

- Laufzeit Schritt 1: $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(|\phi|)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(|\phi|)$.
- D.h. die Laufzeit ist polynomiell in der Eingabelänge $|\phi|$.

Simulation von NTMs durch DTMs

Satz Simulation von NTM durch DTM

Sei N eine NTM, die die Sprache L in Laufzeit $t(n)$ entscheidet. Dann gibt es eine DTM M, die L in Zeit $2^{\mathcal{O}(t(n))}$ entscheidet.

Sei $B(w)$ der Berechnungsbaum von N bei Eingabe w.

Algorithmus DTM M für L

1. Führe Tiefensuche auf $B(w)$ aus.
2. Falls akzeptierender Berechnungspfad gefunden wird, akzeptiere.
3. Sonst lehne ab.

- Berechnungspfade in $B(w)$ besitzen höchstens Länge $t(n)$.
- Berechnungsbaum hat Tiefe höchstens $t(n)$.
- D.h. $B(w)$ besitzt höchstens $2^{t(n)}$ Berechnungspfade.
- Gesamtlaufzeit $2^{t(n)} \cdot \mathcal{O}(t(n)) = 2^{\mathcal{O}(t(n))}$.

Polynomielle Reduktion

Definition Polynomiell berechenbare Funktion

Sei Σ ein Alphabet und $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$. Die Funktion f heißt polynomiell berechenbar gdw. eine DTM M existiert, die für jede Eingabe w in Zeit polynomiell in $|w|$ den Wert $f(w)$ berechnet.

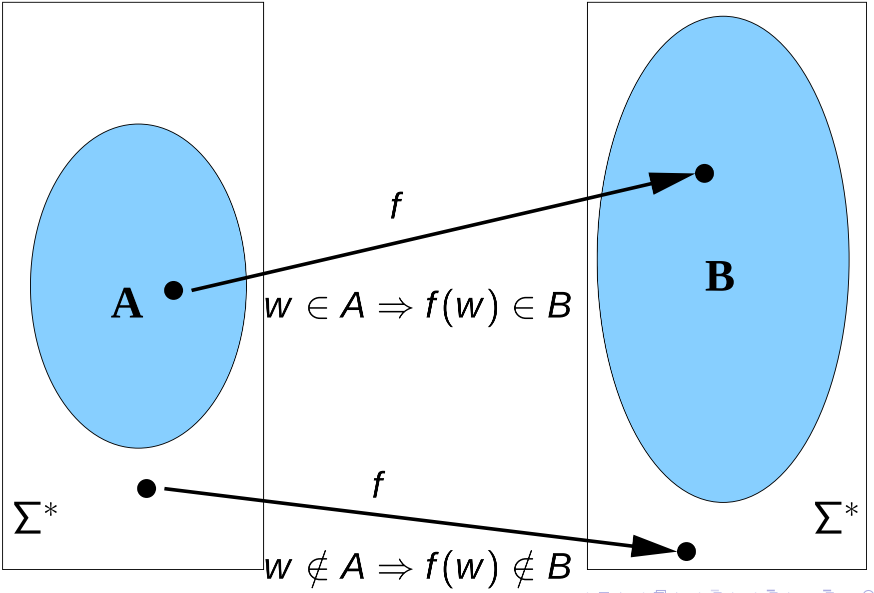
Definition Polynomielle Reduktion

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ Sprachen. A heißt *polynomiell reduzierbar auf* B, falls eine polynomiell berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert mit

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$

Wir schreiben $A \leq_p B$ und bezeichnen f als *polynomielle Reduktion*.

Graphische Darstellung $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$



A ist nicht schwerer als B.

Satz

Sei $A \leq_p B$ und $B \in P$. Dann gilt $A \in P$.

- Wegen $B \in P$ existiert DTM M_B, die B in polyn. Zeit entscheidet.
- Wegen $A \leq_p B$ existiert DTM M_f, die f in polyn. Zeit berechnet.

Algorithmus DTM M_A für A

Eingabe: w

1. Berechne $f(w)$ mittels M_f auf Eingabe w.
2. Falls M_B auf Eingabe $f(w)$ akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

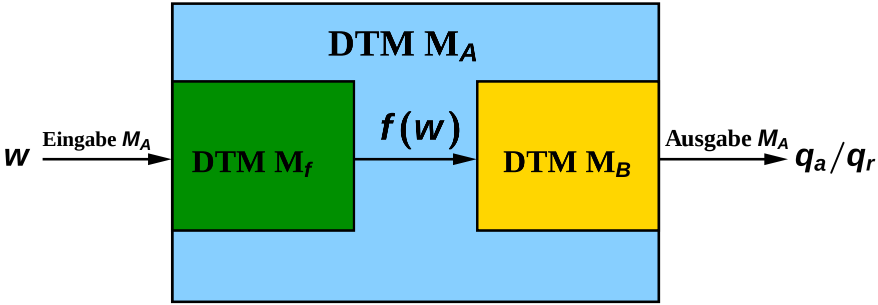
Korrektheit:

- M akzeptiert w $\Leftrightarrow$ M_B akzeptiert $f(w)$ $\Leftrightarrow$ $f(w) \in B$ $\Leftrightarrow$ $w \in A$.

Laufzeit:

- $T(M_A) = \mathcal{O}(T(M_f) + T(M_B))$, d.h. polynomiell in $|w|$.

Graphische Darstellung des Reduktionsbeweises



Transitivität polynomieller Reduktionen

Satz Transitivität von $\leq_p$

Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ Sprachen mit $A \leq_p B$ und $B \leq_p C$. Dann gilt $A \leq_p C$.

- Sei f die polynomielle Reduktion von A auf B, d.h.
  $$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$
- Sei g die polynomielle Reduktion von B auf C, d.h.
  $$v \in B \Leftrightarrow g(v) \in C \quad \text{für alle } v \in \Sigma^*.$$
- Dann gilt insbesondere $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow g(f(w)) \in C$.
- $g(f(w))$ kann in polynomieller Zeit berechnet werden durch Hintereinanderschaltung der polynomiellen DTMs für f und g.

Clique

Definition Clique

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. $C \subseteq V$, $|C| = k$ heißt k-Clique in G, falls je zwei Knoten in C durch eine Kante verbunden sind.

$$\textsc{Clique}{:=}\{(G, k) \mid G \text{ enthält eine } k\text{-Clique.}\}$$

Satz

$3\text{SAT} \leq_p \textsc{Clique}$

Zu zeigen: Es gibt eine polynomielle Reduktion f mit

1. $\phi \in 3\text{SAT} \Leftrightarrow f(\phi) = (G, k) \in \textsc{Clique}$
2. f ist eine polynomiell berechenbare Funktion

Idee für die Reduktion: Konstruiere (G, k) derart, dass

$$\begin{aligned}
\phi \text{ erfüllbar} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \text{ erfüllende Belegung } B \text{ für } \phi. \\
&\Leftrightarrow \quad B \text{ setzt in jeder Klausel mind. ein Literal auf wahr.} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Wahre Literale entsprechen einer } k\text{-Clique in } G.
\end{aligned}$$

Die Reduktion f

Algorithmus M_f für f

Eingabe: $\phi = (a_{11} \vee a_{12} \vee a_{13}) \wedge \ldots \wedge (a_{n1} \vee a_{n2} \vee a_{n3})$

1. Wahl der Knotenmenge V von G
   - Definiere $3n$ Knoten mit Labeln a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} für $i = 1, \ldots, n$.
2. Wahl der Kantenmenge E: Setze Kante $(u, v) \in E$ **außer** wenn
   - u, v entsprechen Literalen derselben Klausel, denn die Clique soll aus Literalen verschiedener Klauseln bestehen.
   - Label von u ist Literal x und Label von v ist $\neg x$, denn x soll nicht gleichzeitig auf wahr und falsch gesetzt werden (Konsistenz).
3. Wahl von k.
   - Setze $k = n$, denn alle Klauseln sollen erfüllt werden.

Ausgabe: (G, k)

zu zeigen: f ist polynomiell berechenbar.

- Laufzeit Schritt 1: $\mathcal{O}(n)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(n^2)$, Schritt 3: $\mathcal{O}(1)$.
- Gesamtlaufzeit $\mathcal{O}(n^2)$ ist polynomiell in der Eingabelänge.

Korrektheit der Reduktion

Zeigen zunächst: $\phi \in 3\text{SAT} \Rightarrow f(\phi) = (G, k) \in \text{Clique}$

- Sei $\phi \in 3\text{SAT}$. Dann besitzt ϕ eine erfüllende Belegung B.
- Damit setzt B in jeder Klausel $(a_{i1} \vee a_{i2} \vee a_{i3})$, $i = 1, \ldots, n$ mindestens ein Literal $a_{i\ell_i}, \ell_i \in [3]$ auf wahr.
- Die n Knoten mit Label $a_{i\ell_i}$ in G sind paarweise verbunden, da
  - die Literale $a_{i\ell_i}$ aus verschiedenen Klauseln stammen.
  - B ist eine konsistente Belegung, d.h. dass ein Literal $a_{i\ell_i}$ entweder auf wahr oder auf falsch gesetzt wird.
- Die n Knoten mit Label $a_{i\ell_i}$ bilden eine n-Clique in G.
- D.h. $f(\phi) = (G, k) \in \text{Clique}$

Korrektheit von f: Rückrichtung

Zeigen: $f(\phi) = (G, k) \in$ Clique $\Rightarrow \phi \in$ 3SAT

- Sei $f(\phi) = (G, k) \in$ Clique. Dann besitzt G eine n-Clique $v_1, \ldots, v_n$.
- Nach Konstruktion der Kantenmenge von E gilt:
  1. $v_1, \ldots, v_n$ korrespondieren zu Variablen in verschiedenen Klauseln.
  2. $\nexists v_i, v_j$ mit Labeln x und $\neg x$.
- Sei B diejenige Belegung, die die Label von $v_1, \ldots, v_n$ wahr setzt.
  1. B setzt in der i-ten Klausel das Literal v_i auf wahr für $i = 1, \ldots, n$.
  2. B ist eine konsistente Belegung.
- Damit ist B ist eine erfüllende Belegung für ϕ.
- D.h. $\phi \in$ 3SAT.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Definition $\mathcal{NP}$-vollständig

Sei L eine Sprache. Wir bezeichnen L als $\mathcal{NP}$-vollständig, falls

1. $L \in \mathcal{NP}$
2. Für **jede** Sprache $A \in \mathcal{NP}$ gilt: $A \leq_p L$.

Separation oder Gleichheit von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$

Satz

Sei L eine $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache und $L \in \mathcal{P}$. Dann gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

- Müssen für beliebiges $A \in \mathcal{NP}$ zeigen, dass $A \in \mathcal{P}$.
- Da $A \in \mathcal{NP}$ und L $\mathcal{NP}$-vollständig ist, gibt es eine polynomiell berechenbare Funktion f mit $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in L$ für alle $w \in A$.
- Sei M_f eine DTM, die die polynomielle Reduktion f berechnet.
- $L \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists$ DTM M_L, die L in Polynomialzeit entscheidet.

Algorithmus DTM M_A für A

Eingabe: w

1. Berechne $f(w)$ mittels M_f.
2. Falls M_L Eingabe $f(w)$ akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

- Laufzeit $T(M_A) = \mathcal{O}(T(M_f) + T(M_L))$, d.h. polynomiell in $|w|$.

$\mathcal{NP}$ Vollständigkeits-Beweise

Satz $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit mittels Reduktion

Seien A, L Sprachen. Sei L $\mathcal{NP}$-vollständig, $A \in \mathcal{NP}$ und $L \leq_p A$.
Dann ist auch A $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: Müssen zeigen, dass $B \leq_p A$ für alle $B \in \mathcal{NP}$.

- Da L $\mathcal{NP}$-vollständig ist, gilt $B \leq_p L$ für beliebiges $B \in \mathcal{NP}$.
- Ferner gilt nach Voraussetzung $L \leq_p A$.
- Aus der Transitivität von $\leq_p$ folgt: $B \leq_p A$.
- Damit ist A ebenfalls $\mathcal{NP}$-vollständig.

Problem: Wir benötigen ein *erstes* $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem.

Satz von Cook-Levin (1971)

Satz von Cook-Levin

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: Müssen zeigen

1. SAT $\in \mathcal{NP}$ (bereits gezeigt)
2. Für alle $L \in \mathcal{NP}$ existiert polyn. berechenbare Reduktion f:
$$w \in L \Leftrightarrow f(w) \in \text{SAT}.$$

Beweisidee: Sei $L \in \mathcal{NP}$ beliebig.

- $\exists$ NTM N mit polynomieller Laufzeit n^k mit
$$w \in L \Leftrightarrow N \text{ akzeptiert } w.$$
- Konstruieren aus (N, w) eine Formel ϕ mit
  1. N akzeptiert $w \;\Leftrightarrow\; f(w) = \phi \in \text{SAT}$
  2. f ist in Zeit polynomiell in $|w| = n$ berechenbar.
- Betrachten dazu $(n^k + 1) \times (n^k + 1)$ Berechnungstabelle von N.

Berechnungstabelle T von N auf w

q_0	$\triangleright$	w_1	$\dots$	w_n	$\sqcup$	$\dots$	$\sqcup$
$\triangleright$	q_i	w_1	$\dots$	w_n	$\sqcup$	$\dots$	$\sqcup$
		$\vdots$				$\vdots$	

- Tabelle T entspricht einem Pfad im Berechnungsbaum.
- Erste Zeile enthält die Startkonfiguration.
- $(i+1)$-te Zeile ist mögliche Nachfolgekonfiguration der i-ten Zeile.
- In Laufzeit n^k können höchstens n^k Zellen besucht werden.
- T akzeptierend $\Leftrightarrow$ T enthält eine akzeptierende Konfiguration.
- Konstruieren ϕ derart, dass ϕ erfüllbar ist gdw. T akzeptierend ist.

Struktur der Formel für ϕ

- Sei $T(i,j)$ der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von T.
- $T(i,j) \in Q \cup \Gamma$ für alle i,j.
- Definieren ϕ über den Booleschen Variablen $x_{i,j,s}$ mit

$$x_{i,j,s} = 1 \Leftrightarrow T(i,j) = s \quad \text{für } s \in Q \cup \Gamma.$$

Formel für ϕ: $\phi = \phi_{Start} \wedge \phi_{accept} \wedge \phi_{Eintrag} \wedge \phi_{move}$ mit

ϕ_{Start}: T beginnt mit Startkonfiguration.

ϕ_{accept}: T muss Eintrag q_a besitzen.

$\phi_{Eintrag}$: T enthält Einträge aus $Q \cup \Gamma$.

ϕ_{move}: T besitzt gültige Nachfolgekonfigurationen.

Definition von ϕ_{Start}, ϕ_{accept} und $\phi_{Eintrag}$

ϕ_{Start}: Kodieren die Startkonfiguration $q_0 \rhd w_1 \dots w_n$

$$x_{1,1,q_0} \wedge x_{1,2,\rhd} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge \dots \wedge x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \dots \wedge x_{1,n^k+1,\sqcup}$$

ϕ_{accept}: ϕ ist erfüllend gdw T eine erfüllende Konfiguration enthält

$$\phi_{accept} = \bigvee_{1 \le i,j \le n^k+1} x_{i,j,q_a}$$

$\phi_{Eintrag}$: $T(i,j) \in Q \cup \Gamma$, d.h. es gibt ein $s \in Q \cup \Gamma$ mit $x_{i,j,s} = 1$.

- $T(i,j)$ enthält mindestens einen Eintrag $s \in Q \cup \Gamma$:

$$\phi_{\ge 1} = \bigvee_{s \in Q \cup \Gamma} x_{i,j,s}.$$

- $T(i,j)$ enthält höchstens einen Eintrag $s \in Q \cup \Gamma$:

$$\phi_{\le 1} = \bigwedge_{s,t \in Q \cup \Gamma, s \ne t} \neg(x_{i,j,s} \wedge x_{i,j,t}).$$

- Liefert insgesamt $\phi_{Eintrag} = \bigwedge_{1 \le i,j \le n^k+1} (\phi_{\ge 1} \wedge \phi_{\le 1})$.

Definition von ϕ_{move}

Ziel: Zeile $i + 1$ muss Nachfolgekonfiguration von Zeile i sein.

- Definieren Fenster F der Größe 2×3.
- (i, j)-Fenster besitzt Einträge $(i, j-1), (i, j), (i, j+1)$ und $(i+1, j-1), (i+1, j), (i+1, j+1)$.
- Tabelle T besitzt (i, j)-Fenster für $i = 1, \ldots, n^k$, $j = 2, \ldots, n^k$.
- Fenster F heißt legal gwd F's Einträge δ nicht widersprechen.

Beispiele für legale Fenster

Sei δ wie folgt definiert

- $\delta(q_1, a) = \{(q_1, b, R)\}$.
- $\delta(q_1, b) = \{(q_2, c, L), (q_2, a, R)\}$.

a	q_1	b
q_2	a	c

legal

a	q_1	b
a	a	q_2

legal

a	b	b
a	a	b

nicht legal

a	a	q_1
a	a	b

legal

a	q_1	b
q_1	a	a

nicht legal

$\sqcup$	b	a
$\sqcup$	b	a

legal

a	q_1	b
q_2	b	q_2

nicht legal

a	b	a
a	b	q_2

legal

b	b	b
c	b	b

legal

Korrektheit der Konstruktion

Lemma Korrektheit Berechnungstabelle

Sei T eine Tabelle mit den folgenden Eigenschaften.

1. Die erste Zeile ist die Startkonfiguration von N auf w.
2. Jedes Fenster ist legal.

Dann ist T eine Berechnungstabelle von N auf Eingabe w.

- $T(i,j) \neq T(i+1,j)$ ist nur dann möglich, falls einer der Einträge $T(i,j-1), T(i,j)$ oder $T(i,j+1)$ einen Zustand enthält.
- Falls die obere Zeile einen Zustand ändert, muss sich die untere Zeile gemäß δ ändern.
- D.h. jede Zeile ist eine Nachfolgekonfiguration der Vorgängerzeile.
- Damit ist T eine Berechnungstabelle.

Konstruktion von ϕ_{move}

- Informal gilt: $\phi_{move} = \bigwedge_{1\leq i\leq n^k, 2\leq j\leq n^k}$ Fenster (i,j) ist legal.
- Die Anzahl legaler Fenster hängt nur von den möglichen Übergängen in N ab, nicht von der Eingabe w.
- D.h. es gibt eine Menge F von 6-Tupeln $(f_1,\ldots,f_6)$, so dass F alle legalen Fenster beschreibt.
- Damit können wir das Prädikt [Fenster (i,j) ist legal] formalisieren

$$\bigvee_{(f_1,\ldots,f_6)\in F} (x_{i,j-1,f_1} \wedge x_{i,j,f_2} \wedge x_{i,j+1,f_3} \wedge x_{i+1,j-1,f_4} \wedge x_{i+1,j,f_5} \wedge x_{i+1,j+1,f_6}).$$

Reduktion ist polynomiell

Lemma Länge von ϕ

Sei N eine NTM mit Laufzeit n^k bei Eingabe w, $|w| = n$. Dann besitzt die Formel $\phi = \phi_{Start} \wedge \phi_{accept} \wedge \phi_{Eintrag} \wedge \phi_{move}$ Länge $\mathcal{O}(n^{2k})$, d.h. Länge polynomiell in n.
Zudem ist ϕ bei Eingabe (N, w) in Zeit $\mathcal{O}(n^{2k})$ berechenbar.

ϕ_{Start}:
- Anzahl Literale: $\mathcal{O}(n^k)$, Berechnung direkt aus w

ϕ_{accept}:
- Anzahl Literale: $\mathcal{O}(n^{2k})$

$\phi_{Eintrag}$:
- Anzahl Literale in $\phi_{\geq 1}, \phi_{\leq 1}$: $\mathcal{O}(1)$, unabhängig von w.
- Anzahl Literale in $\phi_{Eintrag}$: $\mathcal{O}(n^{2k})$.

ϕ_{move}:
- Anzahl legaler Fenster $|F|$: $\mathcal{O}(1)$, unabhängig von w.
- Anzahl Literale in ϕ_{move}: $\mathcal{O}(n^{2k})$.

Von SAT zu 3SAT

Satz

3SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

- Modifizieren zunächst vorigen Beweis derart, dass ϕ in KNF ist.
- ϕ_{start} und ϕ_{accept} sind bereits in KNF.
- $\phi_{Eintrag} = \bigwedge_{i,j}(\phi_{\geq 1} \wedge \phi_{\leq 1}) = \bigwedge_{i,j} \phi_{\geq 1} \wedge \bigwedge_{i,j} \phi_{\leq 1}$
    - $\phi_{\geq 1}$ besteht aus einer Klausel.
    - Schreiben $\phi_{\leq 1}$ als Konjunktion von Klauseln:

$$\phi_{\leq 1} = \bigwedge_{s \neq t} (\neg x_{i,j,s} \vee \neg x_{i,j,t}) .$$

- ϕ_{move}: Wandle disjunktive Normalform des Prädikats für legale Fenster

$$\bigvee_{(f_1,\ldots,f_6) \in F} (x_{i,j-1,f_1} \wedge x_{i,j,f_2} \wedge \ldots \wedge x_{i+1,j+1,f_6}).$$

in KNF um. Umwandlung in $\mathcal{O}(1)$, da $|F|$ unabhängig von $|w| = n$.

Umwandlung von KNF in 3-KNF

Sei $\phi = k_1 \wedge \ldots \wedge k_m$ eine KNF-Formel, wobei $k_i = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ eine Klausel mit $n > 3$ Literalen ist.

- Führen neue Variablen $z_1, \ldots, z_{n-3}$ ein.
- Ersetzen Klausel k_i durch die 3-KNF Formel

$$(a_1 \vee a_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee a_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee a_4 \vee z_3) \wedge \ldots \wedge (\neg z_{n-3} \vee a_{n_1} \vee a_n).$$

- B ist eine erfüllende Belegung für k gdw ein Literal a_i wahr ist.
- Dann ist aber k' erfüllbar mit $a_i = 1$ und

$$z_j = 1 \text{ für } j < i-1 \quad \text{und} \quad z_j = 0 \text{ für } j \geq i-1.$$

- Sei andererseits k' erfüllbar.
- Dann muss ein Literal a_i wahr sein, und damit ist k erfüllbar.

- Können ϕ in KNF bzw. in 3-KNF in $\mathcal{O}(|\phi|)$ Schritten umwandeln.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Satz

CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: zu zeigen

1. CLIQUE $\in \mathcal{NP}$
   - Übung
2. $\exists$ $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache L mit $L \leq_p$ CLIQUE
   - Bereits gezeigt: 3SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.
   - Bereits gezeigt: 3SAT $\leq_p$ CLIQUE.

Knotenüberdeckung

Definition k-Knotenüberdeckung

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Knotenmenge $U \subseteq V$, $|U| = k$ heißt *k-Knotenüberdeckung*, falls

$$e \cap U \neq \emptyset \text{ für alle } e \in E.$$

Wir definieren die folgende Sprache.

$$\textsc{Knotenüberdeckung} := \{(G, k) \mid G \text{ besitzt eine } k\text{-Knotenüberdeckung.}\}$$

Satz

Knotenüberdeckung ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: zu zeigen

1. Knotenüberdeckung $\in \mathcal{NP}$ (Übung)
2. 3-SAT $\leq_p$ Knotenüberdeckung, d.h. es gibt berechenbares f:
$$\phi \in \text{3SAT} \Leftrightarrow f(\phi) = (G, k) \in \textsc{Knotenüberdeckung}$$

Die Reduktion f

Idee der Reduktion f:

- Konstruieren für jedes Literal x_i Knotenpaar mit Labeln x_i und $\neg x_i$.
- Knotenlabel einer Überdeckung bilden erfüllende Belegung.

Algorithmus M_f

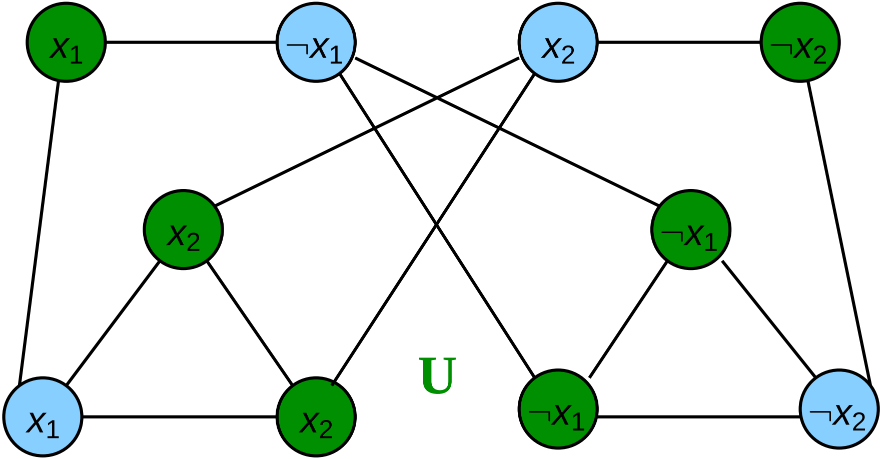
Eingabe: $\phi(x_1, \ldots, x_n) = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ mit $K_j = \ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3}$.

1. Variablenknoten: Für $i = 1 \ldots n$:
   - Konstruiere zwei verbundene Knoten mit Labeln x_i und $\neg x_i$.
2. Klauselknoten: Für $j = 1 \ldots m$:
   - Konstruiere 3 paarweise verbundene Knoten mit Labeln $\ell_{j1}, \ell_{j2}, \ell_{j3}$.
3. Verbinde Variablen- und Klauselknoten mit denselben Labeln.
4. Setze $k = n + 2m$.

Ausgabe: (G, k)

- Schritt 1: $\mathcal{O}(n)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(m)$, Schritt 3: $\mathcal{O}(m)$, Schritt 4: $\mathcal{O}(1)$.
- $|\phi| = \mathcal{O}(n+m) = \mathcal{O}(m)$, d.h. die Laufzeit ist polynomiell in $|\phi|$.

Reduktion für $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$



$\phi \in$ 3SAT $\Rightarrow f(\phi) \in$ KNOTENÜBERDECKUNG

Sei $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in$ 3SAT

- Dann gibt es eine erfüllende Belegung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$.
- In die Menge U werden die folgenden Knoten aufgenommen.
  - n Variablenknoten:
    Falls $x_i = 1$, ist Knoten mit Label x_i in U. Sonst Knoten mit $\neg x_i$.
  - $2m$ Klauselknoten:
    Für jede Klausel ist mindestens ein Knoten mit einem Variablenknoten aus U verbunden. Die *anderen beiden Knoten* sind in U.
- U ist eine $n + 2m$-Knotenüberdeckung:
  - Die Kanten zwischen Variablenknoten $x_i, \neg x_i$ sind überdeckt durch einen Variablenknoten.
  - Kanten zwischen Klauselknoten $\ell_{j1}, \ell_{j2}, \ell_{j3}$ sind überdeckt durch zwei Klauselknoten.
  - Kanten zwischen Variablen- und Klauselknoten sind überdeckt: Entweder der Variablenknoten überdeckt die Kante oder einer der beiden Klauselknoten.
- D.h. $f(\phi) = (G, n + 2m) \in$ KNOTENÜBERDECKUNG

Korrektheit: Rückrichtung

Sei $f(\phi) = (G, n+2m) \in$ KNOTENÜBERDECKUNG:

- Dann gibt es eine $(n+2m)$-Knotenüberdeckung U mit:
  - Mindestens ein Variablenknoten x_i oder $\neg x_i$ ist in U für alle i.
  - Mindestens 2 von 3 Klauselknoten $\ell_{j1}, \ell_{j2}, \ell_{j3}$ sind in U für alle j.
  - Da $|U| = n + 2m$:
    Jeweils *genau ein* Variablenknoten und *genau zwei* Klauselknoten.
- Sei B die Belegung, die die Variablenknoten aus U auf wahr setzt.
  - B ist eine konsistente Belegung.
  - Für alle Klauseln K_j mit Knoten $\ell_{j1}, \ell_{j2}, \ell_{j3}$ ist ein $\ell_{jk}, k \in [3]$ nicht in U.
  - Die Kante vom Klausel- zum Variablenknoten ℓ_{jk} wird überdeckt.
  - D.h. der Variablenknoten ℓ_{jk} ist in U. Damit erfüllt ℓ_{jk} die Klausel K_j.
- D.h. B ist eine erfüllende Belegung für ϕ.
- Damit gilt $\phi \in$ 3SAT.

Subset Sum

Definition Sprache SubsetSum

Sei $M = \{m_1, \ldots, m_k\} \subset \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Sprache

$$\textsc{SubsetSum} := \{(M,t) \mid \exists S \subset M : \sum_{s \in S} s = t\}.$$

Satz

$\textsc{SubsetSum}$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

1. $\textsc{SubsetSum} \in \mathcal{NP}$ (Übung)
2. $3\text{SAT} \leq_p \textsc{SubsetSum}$

Idee der Reduktion $f(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = (S,t)$: Konstruieren

- Für jedes x_i Elemente $y_i, z_i \in S$ für $x_i = 1$ bzw. $x_i = 0$.
- Für jede Klausel K_j Variablen $g_j, h_j \in S$ für nicht erfüllte Literale.
- Definieren Tabelle T mit Zeilen y_i, z_i, g_j, h_j und Zeile t. Die Spalten bestehen aus x_i und K_j für $i \in [n], j \in [m]$.
- Einträge in einer Zeile werden als Dezimaldarstellung interpretiert.

Konstruktion der Reduktion f

Algorithmus M_f

EINGABE: $\phi(x_1,\ldots,x_n) = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ mit $K_j = \ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3}$

1. Erstelle Tabelle T mit
   - $2(n+m)+1$ Zeilen y_i, z_i, g_j, h_j, t für alle i, j
   - $n+m$ Spalten x_i, K_j für alle i, j
2. Definiere mittels des Dezimalwerts der betreffenden Zeile:
   - y_i: Einsen in Spalte x_i und allen Spalten K_j, falls x_i Literal in K_j.
   - z_i: Einsen in Spalte x_i und allen Spalten K_j, falls $\neg x_i$ Literal in K_j.
   - g_j, h_j: Einsen jeweils in Spalte K_j.
   - t: Einsen in Spalten x_i, Dreien in Spalten K_j.
3. Fülle alle nicht belegten Tabelleneinträge mit Nullen.

AUSGABE: (M, t) mit $M = \{y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n, g_1, h_1, \ldots, g_m, h_m\}$.

Laufzeit:

- Eingabelänge $|\phi| \geq \max\{m, n\} = \Omega(m+n)$
- $T(M_f) = \mathcal{O}((n+m)^2)$, d.h. polynomiell in der Eingabelänge.

Bsp für $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2)$

- Definieren Tabelle T

	x_1	x_2	K_1	K_2
y_1	1	0	1	0
z_1	1	0	0	1
y_2	0	1	1	1
z_2	0	1	0	1
g_1	0	0	1	0
h_1	0	0	1	0
g_2	0	0	0	1
h_2	0	0	0	1
t	1	1	3	3

- Setze $y_1 = 1010, z_1 = 1001, \ldots, t = 1133$.
- Belegung $x_1, x_2 = 1$ erfüllt Literale x_1, x_2 in K_1 und Literal x_2 in K_2.
- Zahlen y_1, y_2 summieren sich mit g_1 für K_1 und g_2, h_2 für K_2 zu t.

Korrektheit: $\phi \in$ 3SAT $\Rightarrow f(\phi) \in$ SUBSETSUM

Sei $\phi \in$ 3SAT

- Dann besitzt ϕ eine erfüllende Belegung B.
- Nimm y_i in S auf, falls $x_i = 1$ in B. Sonst nimm z_i in S auf.
- Betrachten $t' = \sum_{s \in S} s$:
  - B ist konsistente Belegung: Obere n Dezimalstellen von t' sind 1.
  - B ist erfüllend: Untere m Dezimalstellen $t_1, \ldots, t_m$ sind aus $\{1, 2, 3\}$.
- Falls $t_i = 1$, nimm g_i und h_i in S auf. Falls $t_i = 2$, nimm g_i in S auf.
- Damit gilt $\sum_{s \in S} s = t$.
- D.h. $f(\phi) = (M, t) \in$ SUBSETSUM

Korrektheit $f(\phi) \in$ SUBSETSUM $\Rightarrow \phi \in$ 3SAT

Sei $f(\phi) \in$ SUBSETSUM

- Dann gibt es $S \subseteq M$ mit $\sum_{s \in S} s = t$, wobei $t = 1 \ldots 13 \ldots 3$.
- Die oberen n Dezimalstellen von t sind 1.
  - Damit enthält S für jedes i genau eines der Elemente y_i, z_i.
  - Sei B die Belegung mit $x_1 = 1$ für $y_i \in S$ und $x_1 = 0$ sonst.
- Die unteren m Dezimalstellen $t_1, \ldots, t_m$ von t sind 3.
  - D.h. t_j kann nicht allein als Summe von g_j und h_j dargestellt werden.
  - Für jedes t_j kommt mindestens eine 1 aus einer Zeile y_i bzw. z_i.
  - D.h. das Literal x_i bzw. $\neg x_i$ erfüllt die Klausel K_j.
- Damit ist B eine erfüllende Belegung für ϕ.
- D.h. $\phi \in$ 3SAT.

Das Rucksackproblem

Definition Sprache Rucksack

Gegeben sind n Gegenstände mit Gewichten $W = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset \mathbb{N}$ und Profiten $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{N}$. Seien ferner $B, k \in \mathbb{N}$.

$$\textsc{Rucksack} := \{(W, P, B, k) \mid \exists I \subseteq [n] : \sum_{i \in I} w_i \leq B \text{ und } \sum_{i \in I} p_i \geq k.\}$$

Satz

Rucksack ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: zu zeigen

1. $\textsc{Rucksack} \in \mathcal{NP}$ (bereits gezeigt)
2. $\textsc{SubsetSum} \leq_p \textsc{Rucksack}$

Reduktion $f(M,t) = (W,P,B,k)$

Algorithmus M_f

EINGABE: M, t

1. Setze $B \leftarrow t$ und $k \leftarrow t$.
2. For $i \leftarrow 1$ to n: Setze $w_i \leftarrow m_i$ und $p_i \leftarrow m_i$

AUSGABE: W, P, B, k

Laufzeit:

- Eingabelänge: $\log(t) + \sum_{i=1}^{n} \log(m_i)$
- Schritt 1: $\mathcal{O}(\log t)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{n} \log(m_i))$
- D.h. Gesamtlaufzeit ist polynomiell in der Eingabelänge.

$(M,t) \in$ SUBSETSUM $\Leftrightarrow f(M,t) \in$ RUCKSACK

Sei $(M,t) \in$ SUBSETSUM

- Dann gibt es eine Menge $I \subseteq [n]$ mit $\sum_{i \in I} m_i = t$.
- Damit gilt $\sum_{i \in I} m_i \leq t$ und $\sum_{i \in I} m_i \geq t$.
- Es folgt $\sum_{i \in I} w_i \leq B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geq t$.
- Damit gilt $f(M,t) = (W,P,B,k) \in$ RUCKSACK

Sei $(W,P,B,k) = f(M,t) \in$ RUCKSACK

- Dann gibt es eine Menge $I \subseteq [n]$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geq k$.
- D.h. es gibt eine Menge $I \subseteq [n]$ mit $\sum_{i \in I} s_i \leq t$ und $\sum_{i \in I} s_i \geq t$.
- Setze $S = \sum_{i \in I} m_i$. Dann gilt $S \subseteq M$ und $\sum_{s \in S} s = t$.
- Damit ist $(M,t) \in$ SUBSETSUM

Exakte Überdeckung

Definition Exakte Überdeckung

Sei $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $F = \{S_1, \ldots, S_m\} \subseteq \mathcal{P}(U)$, d.h. $S_i \subseteq U$.
Eine Menge $C \subseteq F$ heißt *exakte Überdeckung* von U falls

1. $\bigcup_{S_i \in C} S_i = U$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ für alle $S_i, S_j \in C$ mit $i \neq j$.

$$\textsc{Cover} := \{(U, F) \mid F \text{ enthält eine exakte Überdeckung von } U.\}$$

Bsp:

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, F = \{\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}, \{1\}\}$
- $C = \{\{2, 3\}, \{4, 5\}, \{1\}\}$ ist eine exakte Überdeckung von U.
- F ist *keine* exakte Überdeckung von U.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit der exakten Überdeckung

Satz

COVER ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Zeigen

1. COVER $\in \mathcal{NP}$ (Übung)
2. 3SAT $\leq_p$ COVER

Idee der Reduktion

- U enthält alle Variablen x_i, Klauseln K_j und Literale ℓ_{jk}.
- F enthält geeignete Mengen für Variablen, Klauseln und Literale.

Reduktion $f(\phi) = (U, F)$

Algorithmus M_f

EINGABE: $\phi(x_1, \ldots, x_n) = K_1 \wedge \ldots K_m$ mit $K_j = \ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3}$

1. Setze $U = \{x_1, \ldots, x_n, K_1, \ldots, K_m, \ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{13}, \ldots, \ell_{m1}, \ell_{m2}, \ell_{m3}\}$.
2. Definition von F als Vereinigung der Mengen
   - Variablen: $V_{0i} = \{x_i\} \cup \{\ell_{jk} \mid \ell_{jk} = x_i\}$ und
     $V_{1i} = \{x_i\} \cup \{\ell_{jk} \mid \ell_{jk} = \neg x_i\}$ für alle i, j, k.
   - Klauseln: $K_{jk} = \{K_j, \ell_{jk}\}$ für alle $j \in [m], k \in [3]$.
   - Literale: $L_{jk} = \{\ell_{jk}\}$ für alle $j \in [m], k \in [3]$.

AUSGABE: U, F

Laufzeit:

- Eingabelänge von ϕ ist $|\phi| = \Omega(m + n)$
- Schritt 1: $\mathcal{O}(n + m + |\phi|)$
- Schritt 2: Variablen $\mathcal{O}(n)$, Klauseln $\mathcal{O}(m)$, Literale $\mathcal{O}(|\phi|)$.
- D.h. die Laufzeit ist linear in der Eingabelänge.

Bsp.: $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

- $U = \{x_1, x_2, x_3, K_1, K_2, \ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{21}, \ell_{22}, \ell_{23}\}$
- $V_{0i} : T_{01} = \{x_1, \ell_{11}\}, T_{02} = \{x_2, \ell_{12}, \ell_{22}\}, T_{30} = \{x_3, \ell_{33}\}$
- $V_{1i} : T_{11} = \{x_1, \ell_{21}\}, T_{21} = \{x_2\}, T_{31} = \{x_3, \ell_{13}\}$
- $K_{1k} : K_{11} = \{K_1, \ell_{11}\}, K_{12} = \{K_1, \ell_{12}\}, K_{13} = \{K_1, \ell_{13}\}$
- $K_{2k} : K_{21} = \{K_2, \ell_{21}\}, K_{22} = \{K_1, \ell_{22}\}, K_{23} = \{K_1, \ell_{23}\}$
- $L_{1k} : L_{11} = \{\ell_{11}\}, L_{12} = \{\ell_{12}\}, L_{13} = \{\ell_{13}\}$
- $L_{2k} : L_{21} = \{\ell_{21}\}, L_{22} = \{\ell_{22}\}, L_{23} = \{\ell_{23}\}$
- Erfüllende Belegung von ϕ: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Korrektheit: $\phi \in 3SAT \Rightarrow f(\phi) = (U, F) \in \text{Cover}$

Sei $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in 3SAT$

- Dann gibt es eine erfüllende Belegung B der Variablen $x_1, \ldots, x_n$.
- B setzt in jeder Klausel K_j mindestens ein Literal ℓ_{jk} auf wahr.
- Definiere Menge $C \subseteq F$ mittels B:
  - Variablen: Falls $x_i = 0$, nimm V_{0i} in C auf. Sonst V_{1i}.
  - Klauseln: Nimm Menge K_{jk}, die ℓ_{jk} enthält, in C auf.
  - Literale: Für alle nicht von C abgedeckten ℓ'_{jk}, nimm L'_{jk} in C auf.
- C ist eine exakte Überdeckung, denn
  - Variablen x_i: Werden durch V_{0i}, V_{1i} abgedeckt.
  - Klauseln K_j: Werden durch K_{jk} abgedeckt.
    Die paarweisen Schnitte der Mengen V_{0i}, V_{1i}, K_{jk} sind *leer*.
  - Literale ℓ'_{jk}: Werden durch L'_{jk} abgedeckt.
- Damit ist $(U, F) \in \text{Cover}$

Korrektheit: $f(\phi) = (U, F) \in$ COVER $\Rightarrow \phi \in$ 3SAT

Sei $f(\phi) = (U, F) \in$ COVER

- Dann gibt es eine Menge $C \subseteq F$ mit
  - Die Vereinigung der Mengen in C deckt U ab.
  - Der paarweise Schnitt von Mengen in C ist leer.
- Damit gilt für C
  - Variablen x_i: Entweder ist V_{0i} oder V_{1i} in C.
  - Klauseln K_j: Genau eine Klauselmenge K_{jk} ist in C.
- Definieren Variablen in B: $x_i = 0$ falls $V_{0i} \in C$, sonst $x_i = 1$.
  - Die von den V_{0i}, V_{1i} abgedeckten Literale sind auf falsch gesetzt.
  - Jede Klauselmenge K_{jk} muss ein wahres Literal ℓ_{jk} enthalten.
- D.h. B ist eine erfüllende Belegung.
- Damit gilt $\phi \in$ 3SAT.

Hamiltonscher Kreis

Definition Hamiltonscher Kreis

Sei G ein Graph. Ein Kreis in G, der jeden Knoten genau einmal enthält, heißt *Hamiltonscher Kreis*.
Für gerichtete Graphen definieren wir die Sprache

$$\text{GH-KREIS} := \{G \mid G \text{ gerichtet, } G \text{ besitzt einen Hamiltonschen Kreis.}\}$$

Für ungerichtete Graphen definieren wir analog

$$\text{UH-KREIS} := \{G \mid G \text{ ungerichtet, } G \text{ besitzt Hamiltonschen Kreis.}\}$$

Satz

GH-KREIS ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

- Beweis kann mittels COVER $\leq_p$ GH-KREIS geführt werden.
- Wir verzichten hier auf den nicht-trivialen Beweis.

NP-Vollständigkeit von Hamiltonkreis

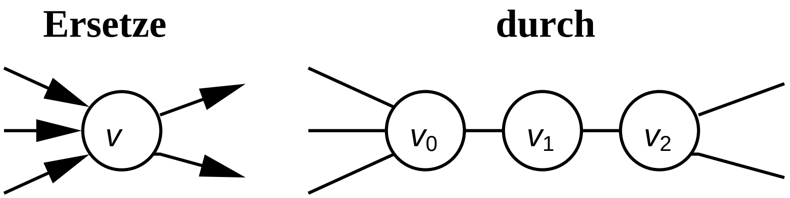
Satz

UH-Kreis ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Zeigen

1. UH-Kreis $\in \mathcal{NP}$ (Übung)
2. GH-Kreis $\leq_p$ UH-Kreis

Idee der Reduktion f:



Reduktion $f(G) = G'$

Algorithmus M_f

EINGABE: $G = (V, E)$ gerichteter Graph mit $V = [n], E = [m]$

1. Konstruktion der Knotenmenge V':
   - Ersetze alle $v \in V$ durch v_0, v_1, v_2
2. Konstruktion der Kantenmenge E':
   - $E' = \{\{u_2, v_0\} \mid (u, v) \in E\} \cup \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\} \mid v \in V\}$.

AUSGABE: $G' = (V', E')$ ungerichteter Graph

Laufzeit:

- Eingabelänge $|G| = \Omega(n + m)$
- Schritt 1: $\mathcal{O}(n)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(n + m)$
- D.h. die Gesamtlaufzeit ist linear in der Eingabelänge.

Korrektheit: $G \in$ GH-KREIS $\Leftrightarrow f(G) = G' \in$ UH-KREIS

Sei $G \in$ GH-KREIS

- Dann existiert eine Permutation $\pi : [n] \to [n]$, so dass G einen Hamiltonschen Kreis $H = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n), \pi(1))$ enthält.
- G' enthält den Hamiltonschen Kreis $H' = (\pi(1)_0, \pi(1)_1, \pi(1)_2, \ldots, \pi(n)_0, \pi(n)_1, \pi(n)_2, \pi(1)_0, \pi(1)_1, \pi(1)_2)$.
- Damit ist $G' \in$ UH-KREIS

Sei $G' \in$ UH-KREIS

- G' enthält einen Hamiltonschen Kreis H'.
  - H' muss für alle $v \in V'$ die Kanten $\{v_0, v_1\}$ und $\{v_1, v_2\}$ enthalten, sonst könnte v_1 nicht in H' sein.
  - H' ist oBdA von der Form $(\pi(1)_0, \pi(1)_1, \pi(1)_2, \ldots, \pi(n)_0, \pi(n)_1, \pi(n)_2, \pi(1)_0, \pi(1)_1, \pi(1)_2)$.
- G besitzt Hamiltonschen Kreis $H = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n), \pi(1))$.
- Damit ist $G \in$ GH-KREIS

Übersicht unserer $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme

Vorlesung:

- SAT
- 3SAT
- CLIQUE
- KNOTENÜBERDECKUNG
- SUBSETSUM
- RUCKSACK
- COVER
- GH-KREIS
- UH-KREIS

Übung:

- TEILGRAPH
- INDEPENDENT SET
- 0,1-PROGRAMMIERUNG
- LÄNGSTER PFAD
- HALF-CLIQUE

Diffie-Hellman Schlüsselaustausch (1976)

Öffentliche Parameter: Primzahl p, Generator g von $\mathbb{Z}_p^*$

Protokoll Diffie-Hellman Schlüsselaustausch

EINGABE: p, g

1. Alice wählt $\alpha \in_R \mathbb{Z}_{p-1}$ und schickt $g^\alpha \bmod p$ an Bob.
2. Bob wählt $\beta \in_R \mathbb{Z}_{p-1}$ und schickt $g^\beta \bmod p$ an Alice.
3. Alice berechnet $\left(g^\beta\right)^\alpha = g^{\alpha\beta}$, Bob analog $(g^\alpha)^\beta = g^{\alpha\beta}$.

Gemeinsamer geheimer DH-Schlüssel: $g^{\alpha\beta}$.

- Angreifer Eve erhält g, g^α, g^β.
- **Sicherheit:** Eve kann $g^{\alpha\beta}$ nicht von g^y, $y \in_R \mathbb{Z}_{p-1}$ unterscheiden.

Definition Decisional Diffie-Hellman (DDH)

Sei p prim, g Generator von $\mathbb{Z}_p^*$. Wir definieren die Sprache

$$\text{DDH} := \{(g^\alpha, g^\beta, g^y) \mid g^y = g^{\alpha\beta}\}.$$

Das ElGamal Kryptosystem (1984)

Parameter des ElGamal Kryptosystems:

öffentlich: p prim, g Generator von $\mathbb{Z}_p^*$, g^a

geheim: $a \in \mathbb{Z}_{p-1}$

Algorithmus ElGamal Ver- und Entschlüsselung

- Verschlüsselung von $m \in \mathbb{Z}_p$ unter Verwendung von p, g, g^a.
  - Wähle $r \in_R \mathbb{Z}_{p-1}$.
  - Berechne $e(m) = (\gamma, \delta) = (g^r, m \cdot (g^a)^r) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p$.
- Entschlüsselung von $e(m)$ unter Verwendung von p, a.
  - Berechne $d(m) = \frac{\delta}{\gamma^a} = \frac{m \cdot g^{ar}}{g^{ar}} = m$.

Laufzeit:

- Verschlüsselung: $\mathcal{O}(\log r \cdot \log^2 p) = \mathcal{O}(\log^3 p)$
- Entschlüsselung: $\mathcal{O}(\log a \cdot \log^2 p) = \mathcal{O}(\log^3 p)$

Sicherheit von ElGamal

Intuitiv: Eve soll $\delta = m \cdot g^{ab}$ nicht von $x \in_R \mathbb{Z}_p$ unterscheiden können.

Protokoll Unterscheider

EINGABE: p, g, g^a

1. Eve wählt $m \in \mathbb{Z}_p^*$ und schickt m an Alice. (Man beachte: $m \neq 0$.)
2. Alice wählt $b \in \{0, 1\}$:
   - Falls $b = 0$: Sende Verschlüsselung $e(m) = (g^r, m \cdot g^{ar})$ an Eve zurück.
   - Falls $b = 1$: Sende $(g^r, x) \in_R \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$ an Eve zurück.

Eves AUSGABE: $b' \in \{0, 1\}$

- Eve gewinnt das Spiel gdw $b' = b$.
- D.h. Eve muss δ von einer Zufallszahl x unterscheiden.

Definition Sprache ElGamal

Sei p prim und g ein Generator von $\mathbb{Z}_p^*$. Wir definieren

$$\text{ElGamal} := \{g^a, g^r, m, x \mid x = m \cdot g^{ar} \bmod p\}.$$

Sicherheitsbeweis per Reduktion

Satz Sicherheit von ElGamal unter DDH

Das ElGamal Kryptosystem ist sicher gegen polynomielle Angreifer unter der Annahme, dass DDH nicht effizient entscheidbar ist.

Logik des Beweises:

- Zeigen: DDH $\leq_p$ ElGamal
- D.h. jeder polynomielle Algorithmus für ElGamal liefert einen polynomiellen Algorithmus für DDH.
- **Annahme:** Es existiert ein polynomieller Angreifer A, der Verschlüsselungen von Zufallszahlen unterscheiden kann.
- Dann gibt es einen Algorithmus, der in polynomieller Zeit DH-Schlüssel $g^{\alpha\beta}$ von Zufallszahlen unterscheidet.
- **Widerspruch:** Nach Annahme gibt es keinen effizienten Algorithmus zum Entscheiden von DH-Schlüsseln $g^{\alpha\beta}$.
- Daher kann es auch keinen polynomiellen Angreifer A geben.

Reduktion f

Algorithmus M_f

EINGABE: $g^\alpha, g^\beta, g^y \in \mathbb{Z}_p^*$

1. Setze $g^a \leftarrow g^\alpha$ und $g^r \leftarrow g^\beta$.
2. Wähle $m \in_R \mathbb{Z}_p^*$.
3. Berechne $x = m \cdot g^y \bmod p$.

AUSGABE: g^a, g^r, m, x

Laufzeit:

- Eingabelänge: $\Omega(\log p)$
- Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(\log^2(p))$

Korrektheit Reduktion: $w \in \text{DDH} \leq_p f(w) \in \text{ElGamal}$

Sei $(g^\alpha, g^\beta, g^y) \in \text{DDH}$.

- Dann gilt $g^y = g^{\alpha\beta} = g^{ar}$.
- Damit ist $x = m \cdot g^y = m \cdot g^{ar}$ korrekte Verschlüsselung von m.
- D.h. $(g^a, g^r, m, x) \in \text{ElGamal}$

Sei $f(g^\alpha, g^\beta, g^y) = (g^a, g^r, m, x) \in \text{ElGamal}$.

- Dann ist $x = m \cdot g^y$ eine korrekte Verschlüsselung von m.
- D.h. $d(m) = \frac{m \cdot g^y}{g^{ar}} = m$ und damit $g^y = g^{ar} = g^{\alpha\beta}$.
- Dann ist $(g^\alpha, g^\beta, g^y) \in \text{DDH}$.

Brechen von ElGamal ist nicht schwerer als DDH

Satz

ELGAMAL $\leq_p$ DDH

Beweis: Wir definieren die folgende Reduktion f.

Algorithmus M_f

EINGABE: $g^a, g^r, m, x \in \mathbb{Z}_p^*$

1. Setze $g^\alpha \leftarrow g^a$ und $g^\beta \leftarrow g^r$.
2. Berechne $g^y = \frac{x}{m}$.

AUSGABE: g^α, g^β, g^y

Laufzeit:

- Eingabelänge: $\Omega(\log p)$
- Laufzeit: $\mathcal{O}(\log^2 p)$

Korrektheit von f: $w \in$ ElGamal $\Leftrightarrow f(w) \in$ DDH

Sei $(g^a, g^r, m, x) \in$ ElGamal.

- Dann ist $x = m \cdot g^{ar}$ korrekte Verschlüsselung von m.
- Damit gilt $\frac{x}{m} = g^{ar} = g^{\alpha\beta} = g^y$.
- D.h. $(g^\alpha, g^\beta, g^y) \in$ DDH.

Sei $f(g^a, g^r, m, x) = (g^\alpha, g^\beta, g^y) \in$ DDH.

- Dann gilt $g^y = g^{\alpha\beta} = g^{ar}$.
- Damit folgt $x = m \cdot g^y = m \cdot g^{ar}$ ist Verschlüsselung von m.
- D.h. $(g^a, g^r, m, x) \in$ ElGamal.

Quadratische Reste

Definition Quadratischer Rest

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Element $a \in \mathbb{Z}_n$ heißt *quadratischer Rest* in $\mathbb{Z}_n$, falls es ein $b \in \mathbb{Z}_n$ gibt mit $b^2 = a \mod n$. Wir definieren

$$QR_n = \{a \in \mathbb{Z}_n^* \mid a \text{ ist ein quadratischer Rest}\} \text{ und } QNR_n = \mathbb{Z}_n^* \setminus QR.$$

Lemma Anzahl quadratischer Reste in primen Restklassen

Sei $p > 2$ prim. Dann gilt $|QR_p| = \frac{|\mathbb{Z}_p^*|}{2} = \frac{p-1}{2}$.

- Sei $a \in QR_p$. Dann gilt $a = b^2 = (-b)^2$.
- D.h. jeder quadratische Rest besitzt ≥ 2 Quadratwurzeln.
- Da $\mathbb{F}_p$ ein Körper ist, besitzt das Polynom $p(x) = x^2 - a$ hat höchstens zwei Nullstellen in $\mathbb{F}_p$. D.h. a hat ≤ 2 Quadratwurzeln.
- Damit bildet $f : \mathbb{Z}_p^* \to QR, x \mapsto x^2 \mod p$ jeweils genau zwei Elemente $\pm b$ auf einen quadratischen Rest $a \in QR$ ab.
- D.h. genau die Hälfte der Elemente in $\mathbb{Z}_p^*$ ist in QR.

Das Legendre Symbol

Definition Legendre Symbol

Sei $p > 2$ prim und $a \in \mathbb{N}$. Das *Legendre Symbol* ist definiert als

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p | a \\ 1 & \text{falls } (a \bmod p) \in QR_p \\ -1 & \text{falls } (a \bmod p) \in QNR_p. \end{cases}$$

Berechnung des Legendre Symbols

Satz

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p.$$

- Für $p|a$ sind beide Seiten Null. Gelte also $p \not| a$.
- Da $a^{p-1} = 1 \bmod p$, folgt $a^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$.
- Sei g Generator von $\mathbb{Z}_p^*$ und $a = g^j$ für ein $j \in \mathbb{Z}_{p-1}$.
- Es gilt für die linke Seite $a \in QR_p$ gdw. j gerade ist.
- Andererseits $a^{\frac{p-1}{2}} = g^{\frac{j(p-1)}{2}} = 1$ gdw $p-1$ teilt $\frac{j(p-1)}{2}$.
- Damit ist die rechte Seite ebenfalls 1 gdw j gerade ist.

Das Legendresymbol lässt sich in Zeit $\mathcal{O}(\log a \log^2 p)$ berechnen.

Eigenschaften des Legendre Symbols

Eigenschaften Quadratischer Reste

1. Multiplikativität: $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$
2. $(QR, \cdot)$ ist eine multiplikative Gruppe.
3. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{für } p = \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & \text{für } p = \pm 3 \bmod 8. \end{cases}$

1. $\left(\frac{ab}{p}\right) = (ab)^{\frac{p-1}{2}} \bmod p = a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p \cdot b^{\frac{p-1}{2}} \bmod p = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.
2. Übungsaufgabe
3. ohne Beweis (nicht-trivial)

Das Quadratische Reziprozitätsgesetz

Satz Quadratisches Reziprozitätsgesetz (Gauß)

Seien $p, q > 2$ prim. Dann gilt

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{p}{q}\right) & \text{für } p = q = 3 \bmod 4 \\ \left(\frac{p}{q}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

ohne Beweis (nicht-trivial)

- Liefert alternativen Algorithmus zur Berechnung des Legendre Symbols.
- **Bsp:**
$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{11}\right) &= \left(\frac{3}{11}\right) \cdot \left(\frac{2}{11}\right) = -\left(\frac{11}{3}\right) \cdot (-1) \\ &= -\left(\frac{2}{3}\right) \cdot (-1) = -(-1) \cdot (-1) = (-1). \end{aligned}$$
- D.h. 6 ist quadratischer Nichtrest in $\mathbb{Z}_{11}^*$.
- Benötigen Primfaktorzerlegung, um das QR-Gesetz anzuwenden.

Das Jacobi Symbol

Definition Jacobi Symbol

Sei $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \in \mathbb{N}$ ungerade und $a \in \mathbb{N}$. Dann ist das *Jacobi Symbol* definiert als

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_i} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right)^{e_k}.$$

- **Warnung:** $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ impliziert nicht, dass $a \in QR_n$ ist.
- Bsp: $\left(\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = (-1)(-1) = 1$.
- D.h. $2 \in QNR_3$ und $2 \in QNR_5$. Damit besitzt $x^2 = 2$ weder Lösungen modulo 3 noch modulo 5.
- Nach CRT besitzt $x^2 = 2 \bmod 15$ ebenfalls keine Lösung.

Verallgemeinerungen für das Jacobi Symbol

Satz

Für alle ungeraden m, n gilt

1. $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$.
2. $\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}} \left(\frac{n}{m}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{n}{m}\right) & \text{für } m = n = 3 \bmod 4 \\ \left(\frac{n}{m}\right) & \textit{sonst}. \end{cases}$.

Wir beweisen hier nur das Analog des Reziprozitätsgesetzes.

- Falls $\mathrm{ggT}(m, n) > 1$, sind beide Seiten 0. Sei also $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.
- Schreiben Primfaktorzerlegung $m = p_1 \ldots p_r$ und $n = q_1 \ldots q_s$. (p_i's und q_j's können dabei jeweils mehrmals auftreten)
- Wandeln $\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{i,j} \left(\frac{p_i}{q_j}\right)$ zu $\left(\frac{n}{m}\right) = \prod_{i,j} \left(\frac{q_j}{p_i}\right)$ durch rs-malige Anwendung des Reziprozitätsgesetzes.
- Anzahl (-1) entspricht Anzahl Paare (i, j) mit $p_i = q_j = 3 \bmod 4$.
- D.h. $\left(\frac{m}{n}\right) = -\left(\frac{n}{m}\right)$ gdw. ungerade viele p_i, g_j kongruent 3 mod 4.
- Es gibt ungerade viele $p_i, g_j = 3 \bmod 4$ gdw. $m = n = 3 \mod 4$ ist.

Rekursive Berechnung des Jacobi Symbols

Algorithmus Jacobi-Symbol

EINGABE: m, n mit n ungerade

1. Falls $ggT(m, n) > 1$, Ausgabe 0.
2. Sei $m = 2^k m'$ mit m' ungerade.
3. Ausgabe $(-1)^{\frac{k(n^2-1)}{8}} \cdot (-1)^{\frac{(m'-1)(n-1)}{4}} \cdot \text{Jacobi-Symbol}(n \bmod m', m')$

AUSGABE: $\left(\frac{m}{n}\right)$

Bsp: $\left(\frac{14}{15}\right) = \left(\frac{2}{15}\right) \cdot \left(\frac{7}{15}\right) = (-1) \cdot \left(\frac{15 \bmod 7}{7}\right) = (-1)$.

- **Laufzeit:** Analog zum Euklidischen Algorithmus: $\mathcal{O}(\log \max\{m, n\})$ rekursive Aufrufe.
- Jeder Aufruf kostet $\mathcal{O}(\log^2 \max\{m, n\})$.
- **Korrektheit:** Für ungerades n gilt
  $\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{m'}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^k \cdot (-1)^{\frac{(m'-1)(n-1)}{4}} \left(\frac{n \bmod m'}{m'}\right)$.

Das Quadratische Reste Problem

Definition Pseudoquadrate

Sei $N = pq$ mit p, q prim. Eine Zahl a heißt *Pseudoquadrat* bezüglich N, falls

$$\left(\frac{a}{N}\right) = 1 \text{ und } a \notin QR_N.$$

Wir definieren die Sprache

$$\textsc{Quadrat} := \{a \in \mathbb{Z}_N^* \mid \left(\tfrac{a}{N}\right) = 1 \text{ und } a \in QR_N\}.$$

- Für alle Pseudoquadrate a gilt: $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right) = (-1)$.
- D.h. die Sprache QUADRAT kann effizient entschieden werden, falls p, q bekannt sind. Im Allgemeinen ist nur N bekannt.

Quadratische Reduositätsannahme (QR-Annahme)

Es gibt keinen polynomiellen Algorithmus, der QUADRAT entscheidet.

Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_N^*$

Lemma

Sei $N = pq$ mit p, q prim und $p = q = 3 \bmod 4$ (sogenannte Blum-Zahl). Dann besitzt jedes $a = x^2 \in QR_N$ genau eine Quadratwurzel in QR_N, die sogenannte Hauptwurzel.

- Die Lösungen des Gleichungssystems $\left| \begin{array}{l} y = \pm x \bmod p \\ y = \pm x \bmod q \end{array} \right|$ liefern mittels Chinesischem Restsatz 4 Lösungen in $\mathbb{Z}_N^*$.
- Eine Lösung ist in QR_N gdw sie in $QR_p \times QR_q$ ist.
- Betrachten Lösung modulo p (analog mod q):

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{(-1)(-x)}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{-x}{p}\right).$$

- Für $p = 3 \bmod 4$ gilt $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)$.
- D.h. $\left(\frac{x}{p}\right) = -\left(\frac{-x}{p}\right)$ und entweder x oder $-x$ ist in QR_p.
- Damit ist genau eine der 4 Lösungen in QR_N.

Der Blum-Blum-Shub (BBS) Pseudozufallsgenerator

Korollar

Die Abb. $f : QR_N \to QR_N, x \mapsto x^2 \bmod N$ ist eine Bijektion auf QR_N.

- (k, ℓ) Pseudozufallsgeneratoren generieren aus k Zufallsbits eine Sequenz von $\ell > k$ Zufallsbits.
- Der (k, ℓ) BBS Generator verwendet obige Bijektion.

Algorithmus BBS Pseudozufallsgenerator (1986)

EINGABE: $N = pq$ Blumzahl der Bitlänge $|N| = k$,
1^ℓ mit $\ell \in \mathbb{N}$ und $\ell > k$

1. Wähle $a \in_R \mathbb{Z}_N^*$ und setze $s_0 = a^2 \bmod N$.
2. For $i = 1$ to ℓ
   1. Setze $s_i \leftarrow s_{i-1}^2 \bmod N$. Gib $z_i = s_i \bmod 2$ aus.

AUSGABE: $(z_1, \ldots, z_\ell) \in \{0, 1\}^\ell$.

Laufzeit: $\mathcal{O}(\ell \log^2 N)$, d.h. polynomiell in der Eingabelänge.

Die Sicherheit des BBS Generators

Sicherheit: Man kann die Verteilung der $(z_1, \ldots, z_\ell)$ nicht von der uniformen Verteilung auf $\{0, 1\}^\ell$ unterscheiden.

Man kann folgendes zeigen:

- Sei A ein polynomieller Unterscheider für $(z_1, \ldots, z_\ell)$.
- Dann gibt es einen polyn. Algorithmus B, der $s_0 \bmod 2$ berechnet.

Satz Sicherheit des BBS Generators

Die Ausgabe des BBS Generators ist von der Gleichverteilung in polynomieller Zeit ununterscheidbar unter der QR-Annahme.

- Annahme: $\exists$ polyn. Unterscheider A für den BBS Generator.
- Sei B ein Algorithmus, der $s_0 \bmod 2$ berechnet.
- Zeigen, dass dann ein polyn. Algorithmus für QUADRAT existiert. (Widerspruch zur Quadratischen Residuositätsannahme)

Entscheiden der Sprache QUADRAT

Algorithmus für QUADRAT

EINGABE: $a \in \mathbb{Z}_N^*$ mit $\left(\frac{a}{N}\right) = 1$

1. Setze $s_0 \leftarrow a \bmod N$.
2. Berechne $(z_1, \ldots, z_\ell)$ mittels BBS Generator.
3. Berechne $z_0 \leftarrow B(z_1, \ldots, z_\ell)$.
4. Falls $z_0 = (a \bmod 2)$, Ausgabe "$x \in QR_N$".
   Sonst Ausgabe "$x \notin QR_N$".

Laufzeit: $\mathcal{O}(\ell \cdot \log^2 N + T(B))$

Korrektheit:

- Wegen $\left(\frac{a}{N}\right) = 1$ ist entweder a oder $(-a) = N - a$ in QR_N.
- D.h. a oder $(-a)$ ist eine Hauptwurzel von $s_1 = a^2 \bmod N$.
- Genau eine der beiden Zahlen $a, (-a)$ ist gerade.
- z_0 ist das unterste Bit der Hauptwurzel von $s_1 = a^2 \bmod N$.
- D.h. a ist eine Hauptwurzel gdw z_0 und $a \bmod 2$ übereinstimmen.

Probabilistische Verschlüsselung

Parameter des Goldwasser-Micali Kryptosystems (1984):

- Sei $N = pq$ eine Blumzahl, d.h. $p = q = 3 \bmod 4$.
- Sei $a \in \mathbb{Z}_N^*$ ein Pseudoquadrat.
- Verschlüsselt werden Bits $m \in \{0, 1\}$.

Goldwasser-Micali Kryptosystem

1. Verschlüsselung von m unter Verwendung von N, a.
   - Wähle $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$.
   - Berechne $e(m, r) = a^m r^2 \bmod N$.
2. Entschlüsselung von $c = e(m, r)$ unter Verwendung von p, q.
   - Berechne $\left(\frac{c}{p}\right) = c^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$.
   - Setze $m = d(c) = \begin{cases} 0 & \text{falls } c \in QR_N, \text{ d.h. falls } \left(\frac{c}{p}\right) = 1. \\ 1 & \text{falls } c \notin QR_N, \text{ d.h. falls } \left(\frac{c}{p}\right) = (-1). \end{cases}$

Sicherheit des Goldwasser-Micali Kryptosystems

Korrektheit

- Falls $m = 0$ ist $c = r^2$ ein zufälliger quadratischer Rest in $\mathbb{Z}_N^*$.
- Falls $m = 1$ ist $c = x \cdot r^2$ ein zufälliges Pseudoquadrat.
- Es gilt $\left(\frac{c}{N}\right) = \left(\frac{a^m r^2}{N}\right) = \left(\frac{a}{N}\right)^m \cdot \left(\frac{r^2}{n}\right) = 1$.
- D.h. entweder $\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{c}{q}\right) = 1$ oder $\left(\frac{c}{q}\right) = \left(\frac{c}{q}\right) = (-1)$.
- Im ersten Fall ist $c \in QR_N$, im zweiten Fall gilt $c \notin QR_N$.

Laufzeit:

- Verschlüsselung: $\mathcal{O}(\log^2 N)$
- Entschlüsselung: $\mathcal{O}(\log^3 N)$ (verbessert: $\mathcal{O}(\log^2 N)$)

Satz Sicherheit des Goldwasser-Micali Kryptosystems

Das GM Kryptosystem ist sicher unter der QR-Annahme.

- Unterscheiden von Verschlüsselungen von 0 und 1 ist äquivalent zum Entscheiden der Sprache QUADRAT.

Bit Commitments

Szenario informal:

1. **Commitment-Phase:**
   - Alice platziert ein Bit $b \in \{0, 1\}$ in einem Safe, der in Bob's Zimmer steht. Bob besitzt keinen Safeschlüssel.
   - Bob kann den Safe nicht einsehen, lernt also nichts über b.
     (Conceiling Eigenschaft)
2. **Revealing-Phase:**
   - Alice öffnet den Safe und zeigt Bob das Bit b.
   - Alice kann ihr Bit dabei nicht ändern.
     (Binding Eigenschaft)

Mathematische Modellierung

- Commitment mittels $f : \{0, 1\} \times X \to Y$ für endliche Mengen X, Y.
- Commitment (sog. Blob): Wähle $x \in X$ und sende $f(b, x)$ an Bob.
- Öffnen des Commitments: Sende b und x an Bob.

Bit Commitment via Goldwasser-Micali Kryptosystem

Öffentliche Parameter:

- Blumzahl N, Pseudoquadrat $a \in \mathbb{Z}_N^*$
- $X = Y = \mathbb{Z}_N^*$

Algorithmus Goldwasser-Micali Bit Commitment

1. Commitment-Phase
   - Wähle $x \in_R \mathbb{Z}_N^*$.
   - Sende Blob $f(b,x) = a^b x^2 \mod N$ an Bob.
2. Revealing-Phase
   - Sende b, x an Bob.
   - Bob überprüft die Korrektheit von $f(b,x) = a^b x^2 \mod N$.

Conceiling Eigenschaft:

- Unter der QR-Annahme lernt Bob nichts über das Bit $b \in \{0, 1\}$.

Binding Eigenschaft

Satz

Goldwasser-Micali Commitments besitzen die Binding Eigenschaft.

- **Annahme:** Alice kann Blob $f(b,x)$ für $b = 0$ und $b = 1$ öffnen.
- D.h. Alice kann $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_N^*$ berechnen mit

$$f(b,x) = a^0 x_1^2 = a^1 x_2^2 \bmod N.$$

- Daraus folgt $a = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \bmod N$, d.h. $\frac{x_1}{x_2}$ ist Quadratwurzel von a. (Widerspruch: a ist ein Pseudoquadrat in $\mathbb{Z}_N^*$.)

Münzwurf über das Telefon

- Bit Commitments haben zahlreiche Anwendungen in kryptographischen Protokollen.
- Exemplarisch hier ein Protokoll für einen fairen Münzwurf.

Algorithmus Münzwurf via Internet

1. Alice sendet Bob Commitment für Bit $b \in \{0, 1\}$.
2. Bob rät ein Bit $b' \in \{0, 1\}$.
3. Alice öffnet ihr Bit. Bob gewinnt gdw $b' = b$.

- Conceiling-Eigenschaft verhindert, dass Bob etwas über b lernt.
- Binding-Eigenschaft verhindert, dass Alice b in $1 - b'$ ändert.

Berechnen von Quadratwurzeln modulo p

Satz Quadratwurzeln mod p

Sei p prim, $p = 3 \bmod 4$ und $a \in QR_p$. Dann sind die beiden Quadratwurzeln von a von der Form

$$x = \pm a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p, \quad \text{wobei } a^{\frac{p+1}{4}} \in QR_p.$$

- Es gilt
$$x^2 = a^{\frac{p+1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot a = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot a = a \bmod p.$$
- Ferner gilt $a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p \in QR_p$ wegen
$$\left(\frac{a^{\frac{p+1}{4}}}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{p+1}{4}} = 1.$$

D.h. Quadratwurzeln können in Zeit $\mathcal{O}(\log^3 p)$ berechnet werden.

Das Blum-Goldwasser Kryptosystem

- Öffentlicher Parameter: Blumzahl $N = pq$
- Klartextraum: $\{0,1\}^\ell$ für ein beliebiges ℓ
- Chiffretextraum: $\{0,1\}^\ell \times \mathbb{Z}_N^*$

Blum-Goldwasser Kryptosystem (1985)

1. Verschlüsselung von $m = (m_1, \ldots, m_\ell) \in \{0,1\}^\ell$ mittels N
   - Wähle $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$.
   - $(z_1, \ldots, z_\ell) \leftarrow$ BBS Generator auf $s_0 = r^2 \bmod N$.
   - For $i = 1$ to ℓ: Berechne $c_i = m_i + z_i \bmod 2$.
   - Berechne $s_{\ell+1} = s_0^{2^{\ell+1}} \bmod N$.
   - AUSGABE: Chiffretext $c = (c_1, \ldots, c_\ell, s_{\ell+1}) \in \{0,1\}^\ell \times \mathbb{Z}_N^*$.
2. Enschlüsselung von c mittels p, q.
   - Berechne $s_0 \in \mathbb{Z}_N^*$ als Lösung von $\left| \begin{array}{lcll} s_0 & = & s_{\ell+1}^{\left(\frac{p+1}{4}\right)^{\ell+1}} & \bmod p \\ s_0 & = & s_{\ell+1}^{\left(\frac{p+1}{4}\right)^{\ell+1}} & \bmod q \end{array} \right|$.
   - $(z_1, \ldots, z_\ell) \leftarrow$ BBS Generator auf $s_0 = r^2 \bmod N$.
   - For $i = 1$ to ℓ: Berechne $m_i = c_i + z_i \bmod N$.

Laufzeit und Korrektheit

Korrektheit:

- $(z_1, \ldots, z_\ell)$ wird als One-Time Pad für m verwendet.
- Entschlüsselung berechnet $\ell + 1$-malig die Hauptwurzel von $s_{\ell+1}$.
- Dies rekonstruiert die Saat s_0 des BBS Generators.

Laufzeit:

- Verschlüsselung: $\mathcal{O}(\ell \cdot \log^2 N)$
- Entschlüsselung: $\mathcal{O}(\log^3 N + \ell \cdot \log^2 N)$.

Fakt Sicherheit des BG-Kryptosystems

Das Blum Goldwasser Kryptosystem ist sicher unter der Annahme, dass Blumzahlen $N = pq$ schwer zu faktorisieren sind.

Da war noch was ...

See you in August.

Viel Erfolg bei der Klausur!