Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Wie lauten die letzten zwei Ziffern von 7^{99}, wie die letzte Ziffer von $9^{(9^9)}$ (jeweils in Dezimaldarstellung)?

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Sei G eine zyklische Gruppe. Beweise: Jede Untergruppe $H \subseteq G$ ist ebenfalls zyklisch.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Sei $a, b \in G$ Elemente einer Gruppe G. Zeige

a) $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(a^{-1})$
b) $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba)$

Hinweis: Wir setzen nicht notwendigerweise voraus, dass G abelsch ist.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Finde eine Formel für $\varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^*|$ und beweise sie.

Präsenzaufgabe 7.5

Zeige:

a) Sei $m \in \mathbb{Z}$. Für welche $m \in \mathbb{Z}$ existiert in $\mathbb{Z}_m$ ein multiplikatives Inverses von 2? Gib in diesen Fällen eine Formel für 2^{-1} an.

b) Sei p prim. Dann gilt für alle $1 \leq a \leq p-1$ gilt: Das multiplikative Inverse von $a \in \mathbb{Z}_p^*$ ist a^{p-2}. (Vgl. Kleiner Satz von Fermat).

Präsenzaufgabe 7.6

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass für alle $a, b \in G$ gilt: $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Präsenzaufgabe 7.7

Berechne $\varphi(3), \varphi(5), \varphi(15)$, und $\varphi(60)$.

Präsenzaufgabe 7.8

Wie lauten die letzten Ziffern der Dezimaldarstellung von 81^{47} und 14^{72}.

Präsenzaufgabe 7.9

Beweise: Jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine zyklische Gruppe.

Tipp: Zeige, dass es für jede Untergruppe H eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $H = \mathbb{Z}n$.