Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Wir vervollständigen den Beweis zu Fall 1 des Master-Theorems: Sei $g(n) := \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$, wobei ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$.

Zeige, dass unter diesen Voraussetzungen gilt, dass $g(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$.

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Berechne die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{2 - 2x + 2x^2 - 2x^3}{1 - 2x + 2x^3 - x^4}$$

Aufgabe 13.3 (4 Punkte)

Gib die folgende lineare Rekursionsgleichung in expliziter Form an:

$$a_n := 2a_{n-1} - 2a_{n-3} + a_{n-4} \quad ,$$

wobei $a_0 = a_1 = 2$ und $a_2 = a_3 = 6$.

Aufgabe 13.4 (4 Punkte)

Sei x_n die Anzahl der Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{a, b, c\}$, die nicht den Substring "ab" enthalten.

Stelle eine Rekursionsgleichung für x_n auf. (Wir zählen das leere Wort der Länge 0 mit.)

Präsenzaufgabe 13.5

Die *Lukaszahlen* sind definiert durch $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $L_1 = 1, L_0 = 2$. Gib eine explizite Darstellung für L_n an.

Präsenzaufgabe 13.6

Gegeben sei die formale Potenzreihe $A(x) = \sum_{n\geq 0} (x^{3n} - x^{3n+1})$.

a) Gib $A(x)$ in der Form $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ an.
b) Berechne die inverse Potenzreihe und gib sie als explizites Polynom an .