Klausur

Diskrete Mathematik I

Donnerstag, den 29.02.2008 um 14 Uhr

Aufgabenblätter

- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus.
- Prüfen Sie, ob die Klausur **8 Aufgaben** enthält.
- Kennzeichnen Sie alle verwendeten Blätter zuerst mit Ihrem Namen.
- Die Klausur **muss** als Ganzes abgegeben werden, auch wenn einige Aufgaben nicht gelöst wurden.
- Halten Sie Ihren Studienausweis und einen Lichtbildausweis bereit.

Bewertung

- Geben Sie **Begründungen, Zwischenergebnisse und verwendete Formeln** an. Ein nicht vorhandener Lösungsweg oder Unleserlichkeit führen zu Punktabzug.
- Die Gesamtnote ergibt sich aus der Klausurnote und dem in den Hausübungen erzielten Bonus.

Zugelassene Hilfsmittel

- Zulässige Hilfsmittel: Bücher Diskrete Strukturen I+II (Angelika Steger) und das Vorlesungsskript. Der Tisch soll sonst leer sein.
- Elektronische Geräte (Handys, PDAs, Laptops, programmierbare Taschenrechner) bitte der Klausuraufsicht zur Verwahrung geben.
- Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist, können zusätzlich ein zweisprachiges Wörterbuch verwenden.

Dauer der Prüfung und zu bearbeitende Aufgaben

- Studierende aus dem Studiengang SiT (SiT02): 4h, Aufgabe 1 - Aufgabe 10 (**)
- Studierende aus dem Studiengang SiT (Bachelor/Master): 2h, Aufgabe 1 - Aufgabe 6
- Alle anderen Studierende: 3h, Aufgabe 1 - Aufgabe 8 (*)

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Geburtsdatum: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ______________________________

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7*	A8*	A9**	A10**	Summe

Aufgabe 1

Jede korrekt beantwortete Teilaufgabe, wird mit +2 Punkten bewertet. Jede falsch beantwortete Teilaufgabe, wird mit -2 Punkten bestraft. Keine Antwort wird mit 0 Punkten bewertet. Wird in der Summe ein negativer Punktwert erreicht, so wird die Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.

a) Welchen Wert hat $S_{7,3}$?
☐ 155 ☐ 301

b) Jeder bipartitite Graph besitzt ein perfektes Matching.
☐ Ja ☐ Nein

c) Die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers mit mindestens 3 Elementen besitzt mindestens 2 Generatoren.
☐ Ja ☐ Nein

d) Die worst-case Laufzeit von Quicksort ist
☐ $O(n \log n)$ ☐ $O(n^2)$

e) Für beliebige Ereignisse A, B gilt $\Pr[A] + \Pr[B] \leq 1 + \Pr[B]\Pr[A|B]$.
☐ Ja ☐ Nein

f) Sei $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{3}) + n^2$. Dann gilt
☐ $T(n) = \Theta(n^{\log_3 4})$ ☐ $T(n) = \Theta(n^2)$

Name :
Vorname :

AUFGABE 2
12=4+4+4 Punkte

Aufgabe 2

a) Wieviele Zahlen $1 \leq n \leq 1200$ gibt es, die durch 4, 6 oder 10 teilbar sind?
b) Peter, Hannah und Klaus teilen sich eine Torte mit 12 Stückchen.

- Wieviele Möglickeiten haben sie dafür, wenn jeder ein Stück Torte bekommen soll?
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn sie für jeden **mindestens** ein Stückchen aufbewahren, sonst aber beliebig verteilen?

Name : AUFGABE 3
Vorname : **12=2+8+2 Punkte**

Aufgabe 3

Gegeben ist der Graph

$$G := (\{1, \ldots, 7\}, E) \ ,$$

wobei

$$E := \{\{2,3\}, \{2,4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,7\}, \{3,6\}, \{3,5\}, \{4,6\}, \{4,7\}\} \ ,$$

und die Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$ mit folgender Wertetabelle:

e	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,7\}$	$\{3,6\}$	$\{3,5\}$	$\{4,6\}$	$\{4,7\}$
$w(e)$	3	2	0	3	1	3	5	1	2

a) Zeichnen Sie G.
b) Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen minimalen Spannbaum. Geben Sie dazu bei jeder Iteration die Kante an, die neu zur Menge E_T hinzugefügt wird.
c) Zeichnen Sie den resultierenden minimalen Spannbaum und geben Sie sein Gewicht an.

Name : AUFGABE 4

Vorname : **12=3+9 Punkte**

Aufgabe 4

Wir betrachten einen Wurf mit zwei fairen Würfeln.

a) Geben Sie einen geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum an.

b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die beiden Ereignisse

   (A) Der erste Wurf hat eine ungerade Augenzahl und

   (B) die Summe der Augen ist ≥ 9

   sind unabhängig.

Aufgabe 5

Gesucht ist ein Graph $G = (V, E)$, der aus einer geraden Anzahl Knoten $|V| = n$ und einer ungeraden Anzahl Kanten $|E| = m$ besteht und eulersch ist.

a) Finden Sie einen solchen Graphen mit minimaler Knotenanzahl.
b) Begründen Sie die Minimalität Ihrer Wahl.

Aufgabe 6

Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist durch die folgende Rekursion gegeben: $a_0 = a_1 = 1$ und

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}\,, \quad \text{für } n \geq 2$$

Finden Sie eine geschlossene Form. Verwenden Sie dazu das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

Aufgabe 7

Finden Sie die kleinste positive ganze Zahl x, die folgende simultane Kongruenz löst:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x &\equiv 1 \pmod 5 \\ 5 \cdot x &\equiv 2 \pmod 6 \\ x &\equiv 4 \pmod 7 \end{aligned}$$

Name :
Vornme :

AUFGABE 8
14 Punkte

Aufgabe 8

Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus nach dem Divide-and-Conquer Ansatz, der als Eingabe eine Liste von ganzen Zahlen der Länge $n = 2^k$ erwartet und als Ausgabe Minima und Maxima der in der Liste enthaltenen Zahlen liefert.

Hinweis: Brechen Sie die Rekursion bei Listenlänge $n = 2$ ab.

a) Geben Sie den entsprechenden Algorithmus als Pseudocode an.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Vergleiche, die der Algorithmus ausführt und zeigen Sie, dass dies besser ist als $2n - 2$ Vergleiche, die bei einer naiven Berechnung benötigt werden.