Zufällige Graphen

Definition Zufälliger Graph $G_{n,p}$

Für $G_{n,p}$ wähle n Knoten und setze jede der $\binom{n}{2}$ Kanten mit Ws p.

Satz

Für alle $\epsilon > 0$ und hinreichend große n gilt:

$G_{n,p}$ mit $p = o(n^{-\frac{2}{3}})$ enthält eine Clique der Größe 4 mit Ws kleiner ϵ.

Beweis:

- Seien $C_1, \ldots, C_{\binom{n}{4}}$ alle Mengen mit 4 Knoten.
- Sei IV $X_i = 1$ falls C_i eine Clique ist und $X = \sum_{i=1}^{\binom{n}{4}} X_i$. Dann gilt
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{4}} \Pr[X_i = 1] = \binom{n}{4} p^6 \leq n^4 \cdot o(n^{-4}) = o(1).$$
- D.h. $\mathbb{E}[X] < \epsilon$ für hinreichend große n. Da $X \geq 0$ folgt
$$\Pr(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] < \epsilon. \quad \square$$

Frage: Enthält $G_{n,p}$ für $p = \omega(n^{-\frac{2}{3}})$ eine 4er-Clique mit großer Ws?

2. Moment Methode

Satz 2. Moment Methode

Sei X eine nicht-negative ganzzahlige ZV. Dann gilt

$$\Pr(X = 0) \leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{(\mathbb{E}[X])^2}.$$

Beweis: Mit Chebyshevs Ungleichung gilt

$$\Pr(X = 0) \leq \Pr(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]) \leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{(\mathbb{E}[X])^2} \quad \square.$$

Nachteil: Die Berechnung von **Var**$[X]$ ist oft aufwändig.

2. Moment Methode

Satz

Sei $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit 0,1-ZV X_i. Dann gilt

$$\Pr(X > 0) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\Pr(X_i{=}1)}{\mathbb{E}[X|X_i{=}1]}.$$

Beweis: Sei $Y = \frac{1}{X}$ für $X > 0$ und $Y = 0$ sonst. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Pr(X > 0) &= \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i Y\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i Y] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i Y \mid X_i = 1] \Pr(X_i = 1) + \mathbb{E}[X_i Y \mid X_i = 0] \Pr(X_i = 0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y \mid X_i = 1] \Pr(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{1}{X} \mid X_i = 1\right] \Pr(X_i = 1) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\Pr(X_i = 1)}{\mathbb{E}[X \mid X_i = 1]}. \qquad \text{(mit Jensens Ungleichung } \mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])\text{)} \qquad \square
\end{aligned}$$

Zufällige Graphen

Satz

Für alle $\epsilon > 0$ und hinreichend große n gilt:
$G_{n,p}$ mit $p = \omega(n^{-\frac{2}{3}})$ enthält keine Clique der Größe 4 mit Ws kleiner ϵ.

Beweis:

- Sei wie zuvor IV $X_i = 1$ falls C_i eine Clique ist und $X = \sum_{i=1}^{\binom{n}{4}} X_i$.
- Zeigen, dass $\Pr(X > 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. D.h. $\Pr(X = 0) < \epsilon$.
- Es gilt für ein festes X_j
$$\mathbb{E}[X \mid X_j = 1] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{4}} \mathbb{E}[X_i \mid X_j = 1] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{4}} \Pr(X_i = 1 \mid X_j = 1).$$
- Für $\binom{n-4}{4}$ Knotenmengen C_i mit $|C_i \cap C_j| = 0$: $X_i = 1$ mit Ws p^6.
- Für $4\binom{n-4}{3}$ Knotenmengen C_i mit $|C_i \cap C_j| = 1$: $X_i = 1$ mit Ws p^6.
- Für $6\binom{n-4}{2}$ Knotenmengen C_i mit $|C_i \cap C_j| = 2$: $X_i = 1$ mit Ws p^5.
- Für $4\binom{n-4}{1}$ Knotenmengen C_i mit $|C_i \cap C_j| = 3$: $X_i = 1$ mit Ws p^3.
- Es folgt $\Pr(X > 0) \geq \frac{\binom{n}{4}p^6}{1+\binom{n-4}{4}p^6+4\binom{n-4}{3}p^6+6\binom{n-4}{2}p^5+4\binom{n-4}{1}p^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.\square$

Lovasz Local Lemma

Motivation: Probabilistische Methode

- Seien $E_1, \ldots, E_n$ schlechte Ereignisse.
- Weiter seien $E_1, \ldots, E_n$ unabhängig. D.h. für alle $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gilt
$$\Pr(\bigcap_{i \in I} E_i) = \prod_{i \in I} \Pr(E_i).$$
- Mit $E_1, \ldots, E_n$ sind auch die Ereignisse $\overline{E_1}, \ldots, \overline{E_n}$ unabhängig.
- Falls $\Pr(E_i) < 1$ für alle i, dann folgt
$$\Pr(\bigcap_{i \in I} \overline{E_i}) = \prod_{i \in I} \Pr(\overline{E_i}) > 0.$$
- D.h. es existiert ein Element des Wsraums, das in keinem der schlechten Ereignisse auftaucht.
- **Frage:** Was passiert für limitierte Formen von Unabhängigkeit?

Definition Abhängigkeitsgraph

E heißt *unabhängig von* $E_1, \ldots, E_n$ falls für alle $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gilt
$$\Pr(E \mid \bigcap_{i \in I} E_i) = \Pr(E).$$

Der *Abhängigkeitsgraph* $G = (V, E)$ für $E_1, \ldots, E_n$ ist definiert als
$$V = \{1, \ldots, n\} \text{ und } E = \{(i, j) \mid E_i \text{ ist abhängig von } E_j\}.$$

Lovasz Local Lemma

Lemma Lovasz Local Lemma (1975)

Seien $E_1, \ldots, E_n$ Ereignisse mit

1. $\Pr(E_i) \leq p$ für alle $i = 1, \ldots, n$,
2. Abhängigkeitsgraph $G = (V, E)$ von $E_1, \ldots, E_n$ besitzt Grad $\leq d$,
3. $4dp \leq 1$.

Dann gilt $\Pr(\bigcap_{i=1}^n \overline{E_i}) > 0$.

Beweis:

- Sei $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Wir zeigen für alle $k \notin S$

  $\Pr(E_k \mid \bigcap_{j \in S} \overline{E_j}) \leq 2p$ per Induktion über $|S| = s, s = 0, \ldots, n$.
- Die Aussage des Theorems folgt aus

$$\Pr(\bigcap_{i=1}^n \overline{E_i}) \;=\; \prod_{i=1}^n \Pr(\overline{E_i} \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{E_j}) = \prod_{i=1}^n (1 - \Pr(E_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{E_j})) \geq \prod_{i=1}^n (1 - 2p) > 0.$$

- Benötigen $\Pr(\bigcap_{j \in S} \overline{E_j}) > 0$. Fall $s = 1$ folgt aus $\Pr(\overline{E_j}) \geq 1 - p > 0$.

Lovasz Local Lemma

Beweis: (Fortsetzung)

- Für $s > 1$ sei OBdA $S = \{1, \ldots, s\}$. Es gilt analog wie zuvor
$$\Pr(\bigcap_{i=1}^{s} \overline{E_i}) = \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \Pr(E_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{E_j})\right) \overset{\text{IV}}{\geq} \prod_{i=1}^{s}(1-2p) > 0.$$
- Sei $S_1 = \{j \in S \mid (k,j) \in E\}$ und $S_2 = S \setminus S_1$. Für $S_2 = S$ gilt
$$\Pr(E_k \mid \bigcap_{j \in S} \overline{E_j}) = \Pr(E_k) \leq p.$$
- Sei also $|S_2| < s$. Sei $F_S = \bigcap_{j \in S} \overline{E_j}$. Es gilt $F_S = F_{S_1} \cap F_{S_2}$ und
$$\Pr(E_k \mid F_S) = \frac{\Pr(E_k \cap F_S)}{\Pr(F_S)} = \frac{\Pr(E_k \cap F_{S_1} \cap F_{S_2})}{\Pr(F_{S_1} \cap F_{S_2})} = \frac{\Pr(E_k \cap F_{S_1} \mid F_{S_2})}{\Pr(F_{S_1} \mid F_{S_2})}.$$
- Es gilt $\Pr(E_k \cap F_{S_1} \mid F_{S_2}) \leq \Pr(E_k \mid F_{S_2}) = \Pr(E_k) \leq p$.
- Es genügt nun, $\Pr(F_{S_1} \mid F_{S_2}) \geq \frac{1}{2}$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \Pr(F_{S_1} \mid F_{S_2}) &= \Pr(\bigcap_{i \in S_1} \overline{E_i} \mid \bigcap_{j \in S_2} \overline{E_j}) \geq 1 - \sum_{i \in S_1} \Pr(E_i \mid \bigcap_{j \in S_2} \overline{E_j}) \\ &\overset{\text{IV}}{\leq} 1 - \sum_{i \in S_1} 2p \geq 1 - 2pd \geq \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Anwendung: Erfüllbarkeit

Problem Erfüllbarkeit von k-SAT

Gegeben: k-SAT Formel (keine Klausel enthält Variable doppelt)
Gesucht: erfüllende Belegung

Satz Existenz erfüllender Belegung

Eine k-SAT Formel ist erfüllend, falls keine Variable in mehr als $T = \frac{2^k}{4k}$ Klauseln vorkommt.

Beweis:

- Wähle eine zufällige Belegung der Variablen.
- Ereignis E_i, $i = 1, \ldots, m$: i-te Klausel ist nicht erfüllt.
- Da jede Klausel k Literale enthält, gilt $p = \Pr(E_i) = \frac{1}{2^k}$.
- E_i, E_j abhängig, falls Klauseln i, j gemeinsame Variable besitzen.
- Jeder der k Variablen in Klausel i kommt in $\leq T = \frac{2^k}{4k}$ Klauseln vor.
- D.h. wir erhalten $d \leq kT \leq \frac{2^k}{4}$. Es folgt $4dp \leq 4\frac{2^k}{4}2^{-k} = 1$.
- Mit Lovasz Local Lemma folgt $\Pr(\bigcap_{i=1}^m \overline{E_i}) > 0$. $\square$